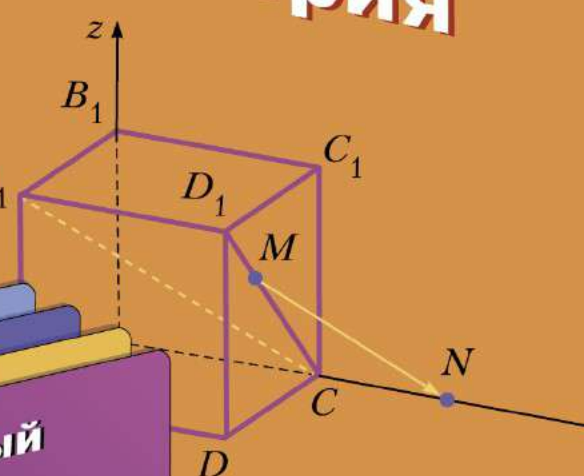
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика

11 класс

Геометрия



Базовый уровень

вентана граф

российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика

Геометрия

11 класс

Базовый уровень

Учебное пособие
под редакцией В. Е. Подольского

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

В этом учебном году вы завершаете изучение школьного курса стереометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на три главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал; самые важные сведения выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать после изучения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

9.15 Задания, рекомендуемые для домашней работы

3.11 Задания, рекомендуемые для устной работы

Глава 1. Координаты и векторы в пространстве

В этой главе вы ознакомитесь с прямоугольной системой координат в пространстве, научитесь находить координаты точек в пространстве, длину отрезка и координаты его середины.

Вы обобщите и расширите свои знания о векторах.

§ 1. Декартовы координаты точки в пространстве

В предыдущих классах вы ознакомились с прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости – это две перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта (рис. 1.1).

Систему координат можно ввести и в пространстве.

Прямоугольной (декартовой) системой координат в пространстве называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта (рис. 1.2). Точку, в которой пересекаются три координатные прямые, обозначают буквой O. Её называют **началом координат**. Координатные прямые обозначим буквами x, y и z, их соответственно называют **осью абсцисс**, **осью ординат**, **осью аппликат**.

Рис. 1.1

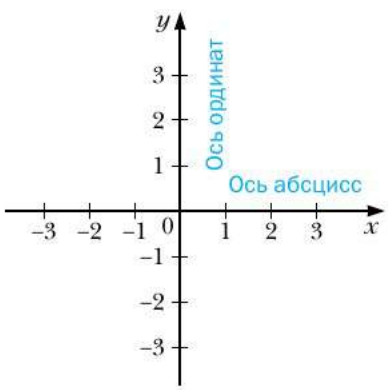
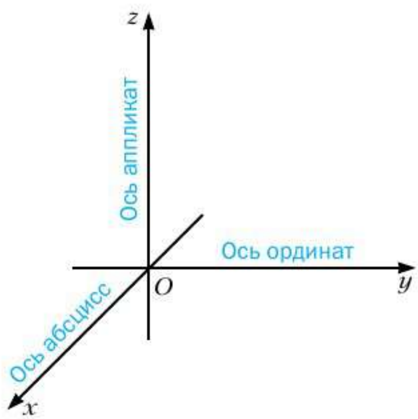


Рис. 1.2

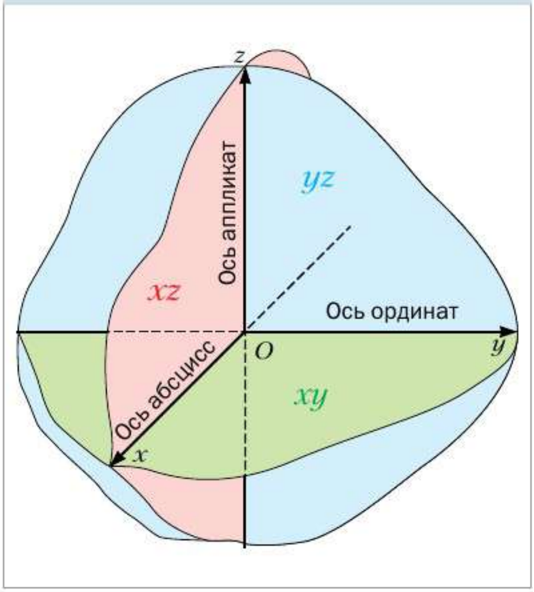


Плоскости, проходящие через пары координатных прямых x и y, x и z, y и z, называют **координатными плоскостями**, их соответственно обозначают xy, xz и yz (рис. 1.3).

Пространство, в котором задана система координат, называют **координатным пространством**. Если оси координат обозначены буквами x, y и z, то координатное пространство обозначают xyz.

Из курса планиметрии вы знаете, что каждой точке M координатной плоскости xy ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$, которые называют координатами точки M. Записывают: $M\ (x; y)$.

Рис. 1.3



Аналогично каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, определяемая следующим образом. Проведём через точку M три плоскости α, β и γ перпендикулярно осям x, y и z соответственно. Точки пересечения этих плоскостей с координатными осями обозначим M_x, M_y и M_z (рис. 1.4). Координату точки M_x на оси x называют **абсциссой** точки M и обозначают буквой x. Координату точки M_y на оси y называют **ординатой** точки M и обозначают буквой y. Координату точки M_z на оси z называют **аппликатой** точки M и обозначают буквой z.

Полученную таким образом упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ называют **координатами точки** M в пространстве. Записывают: $M\ (x; y; z)$.

Если точка принадлежит координатной плоскости или координатной оси, то некоторые её координаты равны нулю. Например, точка $A\ (x; y; 0)$ принадлежит координатной плоскости xy, а точка $B\ (0; 0; z)$ принадлежит оси аппликат.

Теорема 1.1

Расстояние между двумя точками $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ можно найти по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство

Прямая AB не может быть параллельна сразу трём координатным прямым.

Пусть прямая AB не параллельна оси z (случаи, когда прямая AB не параллельна осям x и y, рассматривают аналогично).

Спроектируем точки A и B на координатную плоскость xy. Получим точки A_1 и B_1 (рис. 1.5). Очевидно, что абсцисса и ордината точки A соответственно равны абсциссе и ординате точки A_1. Таким же свойством обладают точки B и B_1. Из курса планиметрии вы знаете, что $A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Рис. 1.4

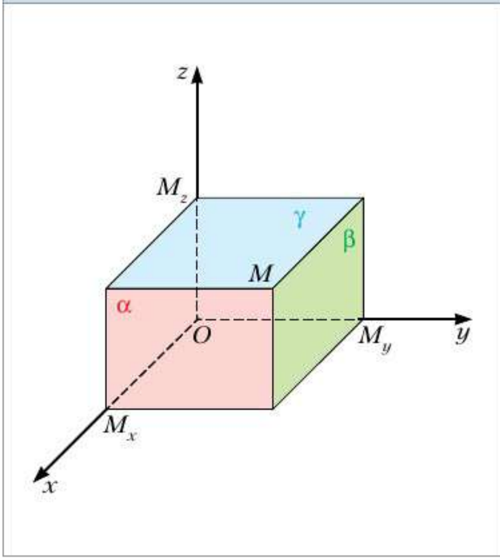
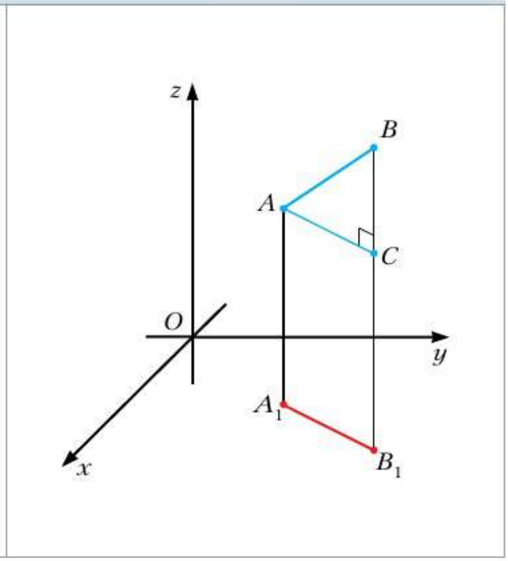


Рис. 1.5



Если отрезок AB параллелен координатной плоскости xy или ей принадлежит, то аппликаты точек A и B равны, т. е. $z_1 = z_2$, и $AB = A_1B_1$. Имеем:

$$AB = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Следовательно, для рассматриваемого случая теорема доказана.

Пусть отрезок AB не параллелен координатной плоскости xy и ей не принадлежит. В трапеции ABB_1A_1 проведём высоту AC (см. рис. 1.5). Очевидно, что $BC = |z_2 - z_1|$. Из прямоугольного треугольника ABC получаем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. ◄$$

Теорема 1.2

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Доказательство

Достаточно доказать, что точка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ является серединой отрезка с концами $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$.

$$\text{Имеем: } AM = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - y_1\right)^2 + \left(\frac{z_1+z_2}{2} - z_1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB;$$

$$MB = \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 + \left(z_2 - \frac{z_1+z_2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB.$$

Итак, мы получили, что $AB = AM + MB$ и $AM = MB$. Следовательно, точка M – середина отрезка AB. ◄

1. Как называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта?
2. Как называют точку, в которой пересекаются три координатные прямые?
3. Как называют координатную прямую, обозначенную буквой x; буквой y; буквой z?
4. Как называют плоскость, проходящую через пару координатных прямых?
5. Как называют пространство, в котором задана система координат?
6. Опишите, каким образом каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$.
7. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
8. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

Упражнения

1.1. Определите, лежит ли данная точка на координатной оси, и в случае утвердительного ответа укажите эту ось:

1) A (4; –3; 0); 3) C (–6; 0; 0); 5) E (0; 0; –2);
2) B (1; 0; –5); 4) D (0; 7; 0); 6) F (3; 0; 0).

1.2. Определите, принадлежит ли данная точка координатной плоскости, и в случае утвердительного ответа укажите эту плоскость:

1) A (4; –3; 5); 3) C (3; 3; 0); 5) E (0; 4; 0);
2) B (0; –2; 6); 4) D (2; 0; 8); 6) F (–1; 1; 2).

1.3. Какие из точек A (5; –8; 1), B (5; 8; 1), C (–5; 7; 1), D (5; –7; –1) лежат на одной прямой, параллельной оси ординат?

1.4. Какие из точек D (2; 3; 4), E (–2; 3; 4), N (2; 3; –4), M (–2; –3; 4) лежат на одной прямой, параллельной оси аппликат?

1.5. Какие из точек A (–1; 6; 2), B (–1; –6; 2), C (1; 6; –2), D (1; –6; 2) лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xz?

1.6. Какие из точек M (5; 10; –3), N (5; 9; 3), K (4; –9; 3), P (4; –9; 2) лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xy?

1.7. Укажите расстояние от точки M (4; –5; 2) до координатной плоскости:

1) xy; 2) xz; 3) yz.

1.8. Укажите координаты проекции точки M (–3; 2; 4) на координатную плоскость:

1) xz; 2) yz; 3) xy.

1.9. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в прямоугольной системе координат так, как показано на рисунке 1.6. Точка A имеет координаты (1; –1; 0). Найдите координаты остальных вершин куба.

1.10. Боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны оси аппликат (рис. 1.7), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Начало координат, точка O, является серединой ребра DD_1. Найдите координаты вершин параллелепипеда.

Рис. 1.6

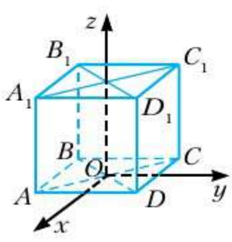
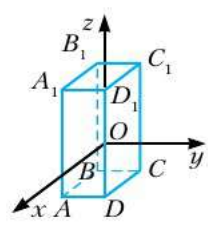


Рис. 1.7



1.11. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) A (3; –4; 2), B (5; –6; 1); 2) A (–2; 3; 1), B (–3; 2; 0).

1.12. Найдите расстояние между точками C (6; –5; –1) и D (8; –7; 1).

1.13. Точки A (3; –2; 6) и C (–1; 2; –4) являются вершинами квадрата $ABCD$. Найдите площадь этого квадрата.

1.14. Точки A (5; –5; 4) и B (8; –3; 3) являются вершинами равностороннего треугольника ABC. Найдите периметр этого треугольника.

1.15. Найдите координаты середины отрезка CD, если C (–2; 6; –7), D (4; –10; –3).

1.16. Найдите координаты середины отрезка EF, если E (3; –3; 10), F (1; –4; –8).

1.17. Точки P (7; 11; –9) и K (8; –6; –1) симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки C.

1.18. Точка S – середина отрезка AD, A (–1; –2; –3), S (5; –1; 0). Найдите координаты точки D.

1.19. Точки A и B симметричны относительно точки M, причём B (1; 3; –5), M (9; 0; –4). Найдите координаты точки A.

1.20. Каковы координаты точки, симметричной точке K (9; –8; 3) относительно:
1) начала координат; 2) плоскости xy; 3) плоскости yz?

1.21. Каковы координаты точки, симметричной точке C (–3; 4; –12) относительно плоскости xz?

1.22. Найдите расстояние от точки M (–3; 4; 9) до оси аппликат.

1.23. Найдите расстояние от точки K (12; 10; –5) до оси ординат.

1.24. Расстояние между точками A (1; y; 3) и B (3; –6; 5) равно $2\sqrt{6}$. Найдите значение y.

1.25. Точка A принадлежит оси абсцисс. Расстояние от точки A до точки C (1; –1; –2) равно 3. Найдите координаты точки A.

1.26. Найдите точку, принадлежащую оси ординат и равноудалённую от точек A (2; 3; 1) и B (4; 1; –5).

1.27. Найдите точку, принадлежащую оси абсцисс и равноудалённую от точки A (–1; 2; 4) и плоскости yz.

1.28. Найдите точку, принадлежащую оси аппликат и равноудалённую от начала координат и точки M (3; –6; 9).

1.29. Точка C (–4; 3; 2) – середина отрезка AB, точка A принадлежит плоскости xz, точка B – оси y. Найдите координаты точек A и B.

1.30. На отрезке AB отметили точки C и D, делящие его на три равные части, точка C лежит между точками A и D. Найдите координаты точки B, если A (–14; 5; –8), D (7; –7; 2).

1.31. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\ (1; -2; 2)$, $B\ (2; 6; 1)$, $C\ (-1; -1; 3)$.

1.32. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-2; 3; -1)$, $B\ (-2; 7; -6)$, $C\ (-1; 7; -6)$ и $D\ (-1; 3; -1)$ является прямоугольником.

1.33. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (4; 2; 10)$, $B\ (10; -2; 8)$, $C\ (4; -4; 4)$ и $D\ (-2; 0; 6)$ является ромбом.

1.34. Найдите точку, принадлежащую плоскости yz и равноудалённую от точек $A\ (2; 1; -3)$, $B\ (3; 2; -2)$ и $C\ (4; -3; -1)$.

1.35. Найдите точку, расстояние от которой до плоскости xy равно 2 и равноудалённую от точек $A\ (1; 0; 0)$, $B\ (0; 1; 0)$ и $C\ (0; 0; 1)$.

1.36. Точки $D\ (-1; 2; 4)$, $E\ (5; -2; 1)$, $F\ (3; -3; 5)$ являются серединами сторон некоторого треугольника. Найдите вершины этого треугольника.

1.37. Известны координаты четырёх вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (2; -1; 1)$, $B\ (1; 3; 4)$, $D\ (6; 0; 1)$, $A_1\ (4; 2; 0)$. Найдите координаты остальных вершин параллелепипеда.

Упражнения для повторения

1.38. Основания равнобокой трапеции равны 13 см и 37 см, а её диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

1.39. По разные стороны от центра окружности проведены две параллельные хорды длиной 16 см и 10 см. Найдите радиус окружности, если расстояние между хордами равно 9 см.

1.40. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите боковое ребро призмы, если площадь её боковой поверхности равна 120 см^2.

§ 2. Векторы в пространстве

В курсе планиметрии вы изучали векторы на плоскости. Мы приступаем к изучению векторов в пространстве. Многие понятия и свойства, связанные с векторами на плоскости, можно почти дословно отнести к векторам в пространстве. Доказательства такого рода утверждений о векторах в пространстве совершенно аналогичны доказательствам соответствующих утверждений о векторах на плоскости. В таких случаях мы ограничимся формулировками утверждений, не приводя их доказательств. При этом свойства векторов в пространстве, которые не имеют аналогов на плоскости, будем изучать подробно.

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B – его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка – его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунке 2.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

В отличие от отрезка, у которого концы – различные точки, у вектора начало и конец могут совпадать.

Договорились вектор, у которого начало и конец – одна и та же точка, называть **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначать $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Обозначают: $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так: $|\vec{a}|$. Модуль нулевого вектора считают равным нулю. Пишут: $|\vec{0}| = 0$.

Определение

Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 2.2 изображена четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ являются коллинеарными. Пишут: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Рис. 2.1

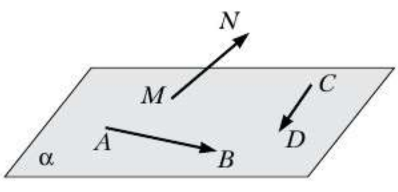
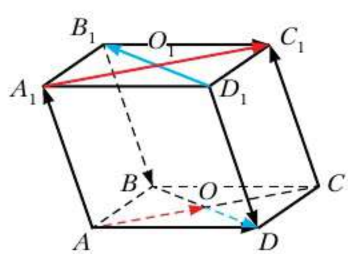


Рис. 2.2



Ненулевые коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** и **противоположно направленными**. Например, на рисунке 2.2 векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ сонаправлены. Пишут: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ противоположно направлены. Пишут: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Считают, что нулевой вектор не имеет направления.

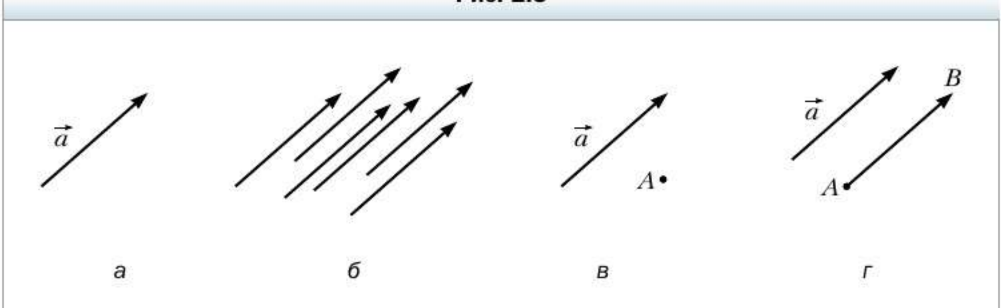
Определение

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 2.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является началом вектора. Так, на рисунке 2.3, *а* изображён вектор $\vec{a}$. На рисунке 2.3, *б* изображены векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них тоже принято называть вектором $\vec{a}$. На рисунке 2.3, *в* изображены вектор $\vec{a}$ и точка A. Если построить вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 2.3, *г*).

Рис. 2.3



Определение

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называют компланарными, если равные им векторы, имеющие общее начало, принадлежат одной плоскости.

Легко установить (сделайте это самостоятельно), что справедливы следующие утверждения: если из трёх данных векторов найдутся два коллинеарных вектора, то эти три вектора являются компланарными; если векторы компланарны, то все они параллельны некоторой плоскости.

На рисунке 2.4 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ компланарны. Действительно, вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ равен вектору $\overrightarrow{AB}$, а векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеют общее начало и лежат в одной плоскости.

Векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ некомпланарны (см. рис. 2.4). Покажем это. Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ равен вектору $\overrightarrow{CC_1}$. Векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, имея общее начало – точку A, не лежат в одной плоскости.

Рассмотрим в координатном пространстве вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим вектор $\overrightarrow{OA}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 2.5). **Координатами вектора** $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}$ $(x; y; z)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y; z)$.

Рис. 2.4

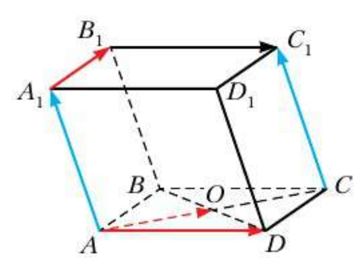
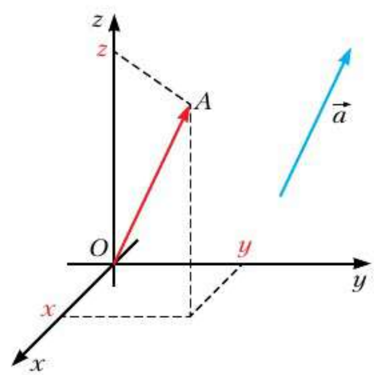


Рис. 2.5



Равные векторы имеют соответствующие равные координаты, и наоборот, *если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы*.

Теорема 2.1

Если точки A $(x_1; y_1; z_1)$ и B $(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $\vec{a}$.

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что ***если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$, то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Пусть в пространстве заданы некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$ (рис. 2.6). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (см. рис. 2.6). Такое преобразование фигуры F называют **параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$.

Рис. 2.6

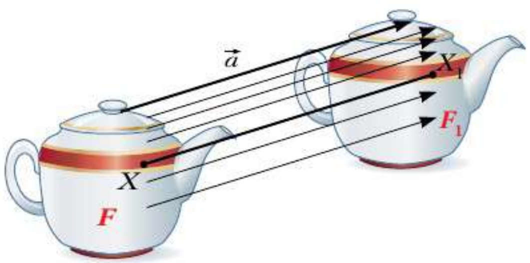
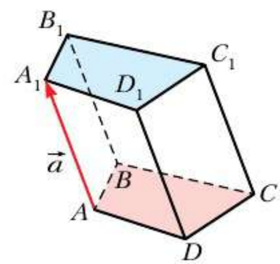


Рис. 2.7



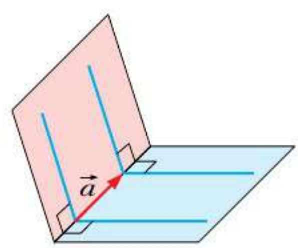
Например, основание $A_1B_1C_1D_1$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является образом основания $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 2.7).

Из двух любых линейных углов двугранного угла один угол является образом другого угла при параллельном переносе (рис. 2.8).

Параллельный перенос является движением.

Если фигура F_1 – образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Рис. 2.8



1. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
2. Какой вектор называют нулевым?
3. Что называют модулем вектора?
4. Какие векторы называют коллинеарными?

5. Как обозначают сонаправленные векторы; противоположно направленные векторы?

6. Какие два ненулевых вектора называют равными?

7. Какие векторы называют компланарными?

8. Поясните, что называют координатами данного вектора.

9. Что можно сказать о координатах равных векторов?

10. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?

11. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

12. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

13. Какое преобразование фигуры F называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$?

Упражнения

2.1. На рисунке 2.9 изображена правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Равны ли векторы:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$;
3) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$;
4) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$?

2.2. Могут ли быть равными векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

2.3. Точки E и F – середины соответственно рёбер AA_1 и AD прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.10), $AB \neq AD$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:

1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;
2) противоположно направлены с вектором $\overrightarrow{AB_1}$;
3) имеют равные модули с вектором $\overrightarrow{BC_1}$.

Рис. 2.9

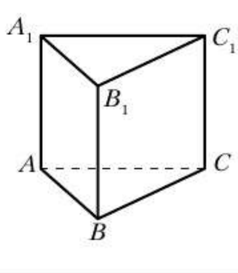
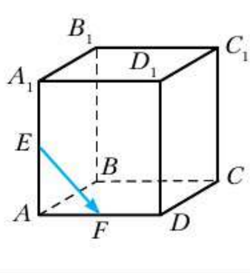


Рис. 2.10



2.4. Точки M и K – середины соответственно рёбер CD и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:

1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{AD}$;

2) противоположно направлены с вектором $\overrightarrow{MK}$;

3) имеют равные модули с вектором $\overrightarrow{AC_1}$.

2.5. Начертите тетраэдр $DABC$. Отложите:

1) от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{CA}$;

2) от точки B вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$;

3) от точки D вектор, равный вектору $\overrightarrow{BC}$.

2.6. Начертите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отложите:

1) от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_1A}$;

2) от точки C вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_1C_1}$;

3) от точки D_1 вектор, равный вектору $\overrightarrow{B_1D}$.

2.7. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) A (3; 4; 2), B (1; –4; 5); 2) A (–6; 7; –1), B (2; 9; 8).

2.8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если C (–1; 10; 4), D (–1; 0; 2).

2.9. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{PF}$ (2; –3; 6), если P (3; 5; –1).

2.10. Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{ST}$ (–3; 4; –2), если T (4; 2; 0).

2.11. Даны точки A (–2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; –3; 6). Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2.12. Даны точки A (5; –12; 7), B (0; y; 3), C (x; 17; –14), D (15; 0; z). При каких значениях x, y и z верно равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

2.13. Найдите модуль вектора $\vec{m}(2; -5; \sqrt{7})$.

2.14. Найдите модуль вектора $\overrightarrow{MK}$, если M (10; –4; 20), K (8; –2; 19).

2.15. Модуль вектора $\vec{a}$ (–4; y; 12) равен 13. Найдите значение y.

2.16. При каких значениях k векторы $\vec{a}$ (4; $k + 3$; 10) и $\vec{b}$ (k; 4; $k + 9$) имеют равные модули?

2.17. Найдите точку, являющуюся образом при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (6; –2; 3) точки:
1) M (5; –3; 7); 2) O (0; 0; 0); 3) K (–4; 0; 1).

2.18. Найдите точку, являющуюся прообразом при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ (–2; 1; –3) точки:
1) O (0; 0; 0); 2) C (–2; 1; –7).

2.19. Даны точки A (–8; 4; –4) и B (5; –6; 1). Найдите вектор, задающий параллельный перенос, при котором:
1) образом точки A является точка B;
2) образом точки B является точка A.

2.20. Используя векторы, докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–4; 2; 5), B (–6; 3; 0), C (12; –8; 1) и D (14; –9; 6) является параллелограммом.

2.21. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: A (10; –8; –1), C (–2; 4; 4) и D (11; –20; 10). Используя векторы, найдите координаты вершины B.

2.22. Модуль вектора $\vec{m}$ равен $4\sqrt{3}$, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

2.23. Модуль вектора $\vec{c}$ $(x; y; z)$ равен 9, его координаты x и z равны, а координаты x и y – противоположные числа. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

2.24. При параллельном переносе образом точки A (–2; –1; 3) является точка A_1 (–4; 1; –5). Найдите образ B_1 точки B (7; –5; 4) при этом параллельном переносе.

2.25. Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки M (–4; 7; –2) является точка M_1 (–8; 1; –7), а образом точки N (–1; 4; –2) – точка N_1 (–5; –2; –7)?

Упражнения для повторения

2.26. Основания равнобокой трапеции равны 15 см и 39 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.

2.27. По одну сторону от центра окружности проведены две параллельные хорды длиной 30 см и 48 см. Найдите расстояние между хордами, если радиус окружности равен 25 см.

2.28. Основанием прямой призмы является ромб. Диагонали призмы равны 16 см и $2\sqrt{19}$ см, а её высота – 2 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

§ 3. Сложение и вычитание векторов

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от произвольной точки A пространства вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.1) и записывают $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника**.

Можно показать, что сумма $\vec{a}+\vec{b}$ не зависит от выбора точки A.

Заметим, что *для любых трёх точек A, B и C выполняется равенство* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Оно выражает правило треугольника.

Теорема 3.1

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);
3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство).

Сумму трёх и большего количества векторов находят так: вначале складывают первый и второй векторы, потом к полученной сумме прибавляют третий вектор и т. д. Например, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Для тетраэдра $DABC$, изображённого на рисунке 3.2, можно записать: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

Рис. 3.1

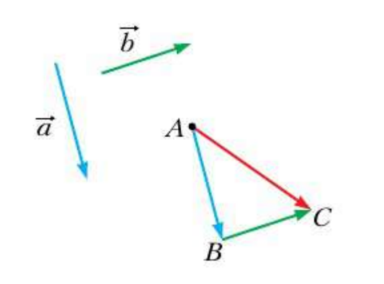
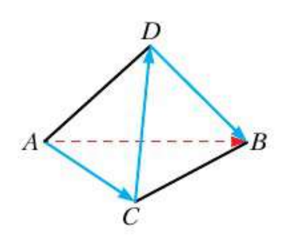


Рис. 3.2



Для сложения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удобно пользоваться **правилом параллелограмма**.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 3.3). Тогда искомая сумма $\vec{a}+\vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Рассмотрим некомпланарные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ (рис. 3.4). Найдём сумму этих векторов.

Рис. 3.3

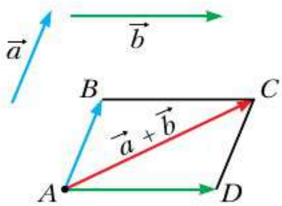
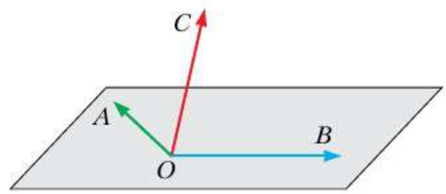


Рис. 3.4



Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его рёбрами (рис. 3.5). Отрезок OD является диагональю этого параллелепипеда. Докажем, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

Поскольку четырёхугольник $OBKA$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$. Имеем: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Поскольку четырёхугольник $OCDK$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

Описанный способ сложения трёх некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, называют **правилом параллелепипеда**.

Определение

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.6). Тогда $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Значит, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, следовательно, вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отметим, что *для любых трёх точек O, A и B выполняется равенство* $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Оно выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки.

Теорема 3.2

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны (a_1; a_2; a_3) и (b_1; b_2; b_3), то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны ($a_1 - b_1$; $a_2 - b_2$; $a_3 - b_3$).

Определение

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

На рисунке 3.7 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$ – противоположные. Также противоположными являются, например, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Рис. 3.5

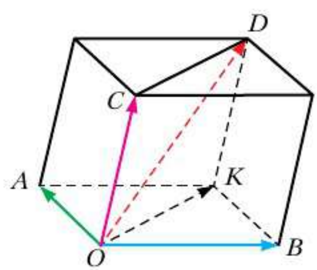


Рис. 3.6

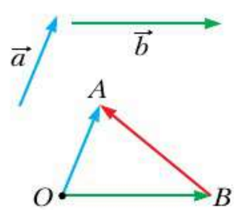
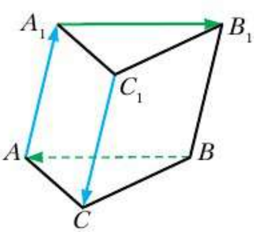


Рис. 3.7



Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$.

Очевидно, что вектор $\overrightarrow{AB}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{BA}$, т. е. для любых двух точек A и B выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника получаем, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Из этого равенства следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1; a_2; a_3), то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты ($-a_1$; $-a_2$; $-a_3$).

Теорема 3.3

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Эта теорема позволяет свести вычитание векторов к сложению: чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$ (рис. 3.8).

<u>**Задача.**</u> Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.9). Выразите векторы $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Рис. 3.8

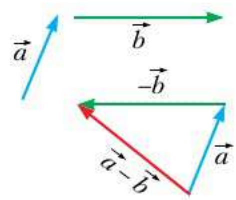
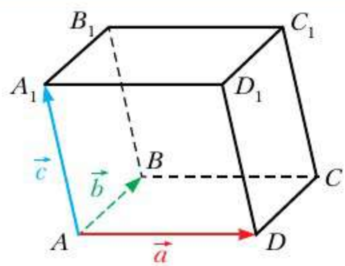


Рис. 3.9



Решение. Воспользуемся правилом параллелепипеда. Имеем:

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c};$$

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$ ◄

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
5. Опишите правило параллелепипеда для нахождения суммы трёх векторов.
6. Какой вектор называют разностью двух векторов?
7. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?

8. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?

9. Какие векторы называют противоположными?

10. Как можно свести вычитание векторов к сложению векторов?

Упражнения

3.1. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.10). Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1C_1}$.

3.2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

3.3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.11). Найдите сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

3.4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.12). Найдите сумму $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

Рис. 3.10

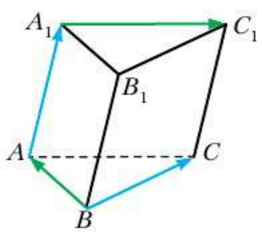


Рис. 3.11

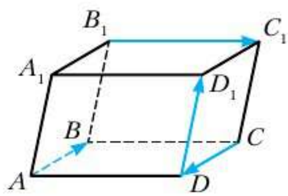
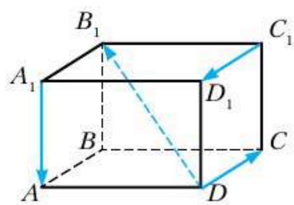


Рис. 3.12



3.5. Даны векторы $\vec{a}$ (3; –6; 4) и $\vec{b}$ (–2; 4; –5). Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

3.6. Даны векторы $\vec{m}$ (–7; –1; 8) и $\vec{n}$ (–3; 2; –4). Найдите:

1) координаты вектора $\vec{m} + \vec{n}$; 2) $|\vec{m} + \vec{n}|$.

3.7. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. 3.10). Найдите разность векторов:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{B_1C_1}$.

3.8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите разность векторов:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$.

3.9. Даны векторы $\vec{a}$ (–10; 15; –20) и $\vec{b}$ (2; 6; –12). Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

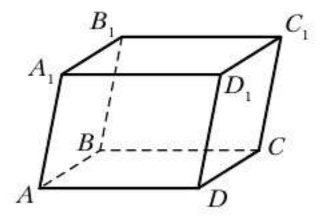
3.10. Даны векторы $\vec{m}\,(3; -1; 2)$ и $\vec{n}\,(4; -2; -3)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{m} - \vec{n}$; 2) $|\vec{m} - \vec{n}|$.

3.11. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.13). Укажите все векторы, началом и концом каждого из которых являются вершины параллелепипеда, противоположные вектору:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{B_1D}$; 3) $\overrightarrow{AC}$.

Рис. 3.13



3.12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 3.13). Укажите все векторы, началом и концом каждого из которых являются вершины параллелепипеда, противоположные вектору:

1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$.

3.13. Укажите координаты вектора, противоположного вектору $\vec{a}\,(13; -10; 9)$.

3.14. Упростите выражение:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{EF}$.

3.15. Упростите выражение:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BM}$;

2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AC}$.

3.16. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}$ противоположны.

3.17. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EC}$ противоположны.

3.18. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму

$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB_1}$.

3.19. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{CB}$.

3.20. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{C_1D_1}$.

3.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC}$.

3.22. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC}$, где O — произвольная точка пространства.

3.23. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right| = \left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}\right|$.

3.24. Сторона основания правильной пирамиды $MABCD$ равна 2 см. Найдите модуль вектора $\vec{m} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BM}$.

3.25. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4 см. Точка D – середина ребра AB. Найдите модуль вектора $\vec{a} = \overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{A_1C}$.

3.26. Найдите координаты точки A такой, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, если $B\ (4; -2; 12)$, $C\ (3; -1; 4)$.

3.27. Найдите координаты точки M такой, что $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, если $C\ (1; -5; 3)$, $D\ (-2; 0; 6)$.

3.28. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что
$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$.

3.29. Даны четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что
$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{DA_1}$.

3.30. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ через векторы $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1D}$.

3.31. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

3.32. Даны векторы $\vec{a}\ (2; -1; 4)$, $\vec{b}\ (0; -3; 6)$ и $\vec{c}\ (1; y; 5)$. Какое наименьшее значение принимает модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и при каком значении y?

3.33. Даны векторы $\vec{m}\ (6; -2; z)$, $\vec{n}\ (x; 1; 2)$ и $\vec{k}\ (3; -4; -7)$. Какое наименьшее значение принимает модуль вектора $\vec{m} - \vec{n} - \vec{k}$ и при каких значениях x и z?

Упражнения для повторения

3.34. Одно из оснований прямоугольной трапеции на 7 см меньше другого, а бóльшая боковая сторона равна 25 см. Найдите площадь трапеции, если её меньшая диагональ делит прямой угол трапеции пополам.

3.35. Хорды AB и AC окружности перпендикулярны, $AB = 12$ см, $AC = 16$ см. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

3.36. Бóльшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна $8\sqrt{3}$ см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

§ 4. Умножение вектора на число. Гомотетия

Определение

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

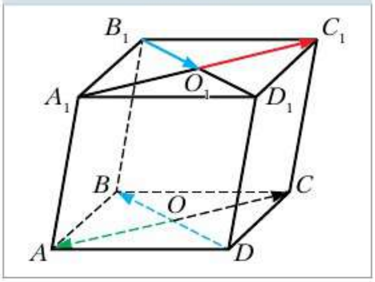
1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

Рис. 4.1



На рисунке 4.1 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имеем: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = -2\overrightarrow{OA}$.

Из определения следует, что:

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Последнее равенство показывает, что при умножении вектора на -1 получаем вектор, противоположный данному.

Из определения умножения вектора на число следует, что *если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Поэтому *из равенства $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ получаем, что точки O, A и B лежат на одной прямой.*

Теорема 4.1

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Теорема 4.2

Если координаты вектора $\vec{a}$ равны $(a_1; a_2; a_3)$, то координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$.

Умножение вектора на число обладает такими свойствами. *Для любых чисел k, m и для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняются равенства:*

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – *сочетательное свойство*;

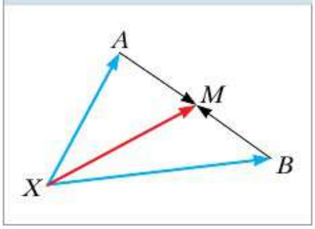
2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – *первое распределительное свойство*;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – *второе распределительное свойство.*

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие сумму векторов, их разность и произведение вектора на число, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения. Например: $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} - 6\vec{b} - 4\vec{a} - 4\vec{b} = -\vec{a} - 10\vec{b}.$

Задача 1. Пусть точка M – середина отрезка AB и X – произвольная точка пространства (рис. 4.2). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Рис. 4.2



Аналогичное утверждение было доказано в курсе планиметрии. Приведённое там доказательство применимо и к этой задаче (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача 2. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC и X – произвольная точка пространства (рис. 4.3). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

Решение. Рассмотрим медиану BK треугольника ABC (рис. 4.4). Имеем:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM};$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XK} + \overrightarrow{KM}.$$

Рис. 4.3

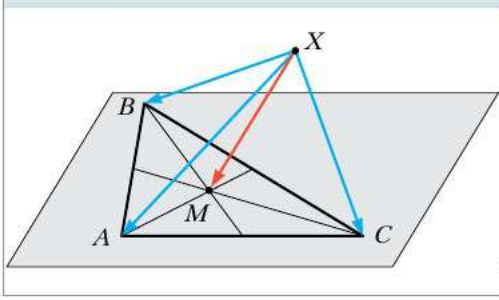
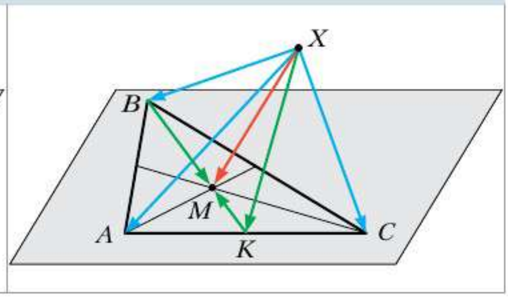


Рис. 4.4



Умножим обе части второго равенства на 2 и сложим его с первым равенством:

$$3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{KM}.$$

Поскольку M – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $BM = 2MK$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{BM}$ и $2\overrightarrow{KM}$ – противоположные, т. е. $\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{KM} = \vec{0}$. Тогда получаем: $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK}$.

Воспользовавшись ключевой задачей 1, запишем: $\overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right)$.

Отсюда $2\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$. Имеем: $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$. Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$. ◂

<u>Задача 3.</u> Пусть треугольник AB_1C – сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что диагональ BD_1 параллелепипеда проходит через точку пересечения медиан треугольника AB_1C и эта точка делит диагональ в отношении 1 : 2, считая от вершины B.

Решение. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника AB_1C (рис. 4.5). Воспользовавшись ключевой задачей 2, запишем:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right).$$

По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$. Значит, точки B, M и D_1 лежат на одной прямой, т. е. диагональ BD_1 проходит через точку M пересечения медиан треугольника AB_1C. Поскольку $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$, то $BM : MD_1 = 1 : 2$. ◂

<u>Задача 4.</u> В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на отрезке D_1C отметили точку M так, что $D_1M : MC = 1 : 3$. На продолжении ребра BC за точку C отметили точку N так, что $BC : CN = 4 : 3$. Докажите, что $A_1C \parallel MN$.

Решение. Рассмотрим в пространстве систему координат с началом координат в точке B, осями, содержащими рёбра BA, BC и BB_1 куба, и единичными отрезками, равными ребру куба (рис. 4.6). Найдём координаты векторов $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{MN}$ и покажем, что эти векторы коллинеарны.

Рис. 4.5

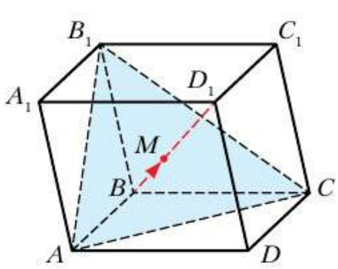
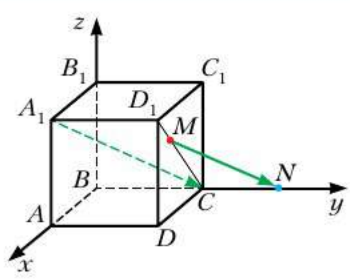


Рис. 4.6



Легко найти координаты точек A_1, C, M и N (сделайте это самостоятельно): A_1 $(1; 0; 1)$, C $(0; 1; 0)$, $M\left(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{7}{4}; 0\right)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{A_1C}$ равны $(-1; 1; -1)$, а вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. Поэтому $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A_1C}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны. Эти векторы не лежат на одной прямой. Значит, $A_1C \parallel MN$. ◄

Решая задачу, мы связали рассматриваемую фигуру (в нашем случае – это куб) с системой координат. Поставив в соответствие отдельным точкам фигуры их координаты, нам удалось доказать необходимое утверждение.

Такой метод решения задач называют **методом координат**.

Рис. 4.7

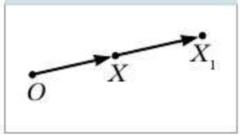
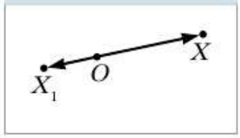


Рис. 4.8



Пусть точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$ (рис. 4.7, 4.8). В этом случае говорят, что точка X_1 – образ точки X при **гомотетии с центром** O и **коэффициентом** k.

Точку O называют **центром гомотетии**, число k – **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 4.9). Такое преобразование фигуры F называют **гомотетией с центром O и коэффициентом k**.

Например, на рисунке 4.10 большой куб гомотетичен меньшему с центром A и коэффициентом 2.

Рис. 4.9

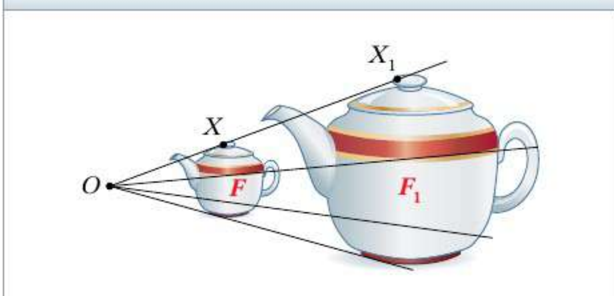
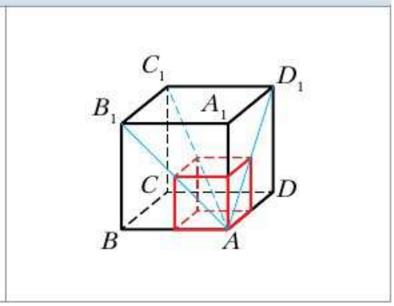


Рис. 4.10



На рисунке 4.11 пирамида $DABC$ гомотетична пирамиде $DA_1B_1C_1$ с центром D и коэффициентом $-\frac{1}{3}$.

Рассмотрим некоторые свойства гомотетии.

При гомотетии:

- *образом прямой является данная прямая, если центр гомотетии принадлежит этой прямой, и прямая, параллельная данной, если центр гомотетии не принадлежит этой прямой;*
- *образом плоскости является данная плоскость, если центр гомотетии принадлежит этой плоскости, и плоскость, параллельная данной плоскости, если центр гомотетии не принадлежит данной плоскости;*
- *образом отрезка является отрезок;*
- *образом угла является угол, равный данному;*
- *площадь многоугольника изменяется в k^2 раз, где k — коэффициент гомотетии.*

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Дальнейшие рассуждения проведём для треугольной пирамиды (рис. 4.12). Для других n-угольных пирамид рассуждения будут аналогичными.

Рис. 4.11

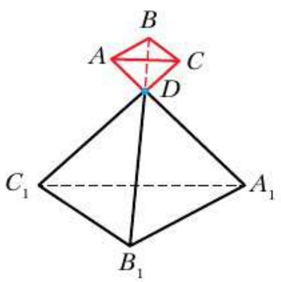
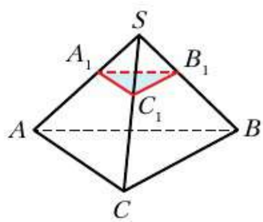


Рис. 4.12



Легко показать (сделайте это самостоятельно), что $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$.

Тогда $\overrightarrow{SA} = k\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = k\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC} = k\overrightarrow{SC_1}$, где $k > 0$. Следовательно, треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром S и коэффициентом k.

Приведённые рассуждения позволяют сделать такой вывод: *основания усечённой пирамиды — гомотетичные многоугольники.*

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля?
2. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число?
3. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
4. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?
5. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$?
6. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.
7. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?
8. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.
9. Сформулируйте свойства гомотетии.
10. Какая фигура является сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию пирамиды?

Упражнения

4.1. Модуль вектора $\vec{m}$ равен 4. Чему равен модуль вектора $\vec{n}$, если:

1) $\vec{n} = 3\vec{m}$; 2) $\vec{n} = -5\vec{m}$?

4.2. Какими векторами, сонаправленными или противоположно направленными, являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

4.3. Дан вектор $\vec{a}\,(4;\ -8;\ -20)$. Укажите координаты вектора $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = 5\vec{a}$; 2) $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$.

4.4. Даны векторы $\vec{a}\,(-3;\ 2;\ 5)$ и $\vec{b}\,(-2;\ -4;\ 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если:

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

4.5. Даны векторы $\vec{m}\,(1;\ 7;\ -8)$ и $\vec{n}\,(3;\ -1;\ 6)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если:

1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$; 2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$.

4.6. Найдите модуль вектора $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, если $\vec{a}\,(-1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ 2;\ -2)$.

4.7. Найдите модуль вектора $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$, если $\vec{a}\,(0{,}5;\ -0{,}5;\ 1{,}5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

4.8. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A\ (4; -1; -4)$, $B\ (0; 5; 6)$, $C\ (0; 2; 7)$, $D\ (2; -1; 2)$?

4.9. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{FK}$, если $D\ (2; -3; 4)$, $E\ (-1; 6; 2)$, $F\ (-2; 8; 6)$, $K\ (-3; 11; 7)$?

4.10. Образом точки $A\ (-3; 9; 5)$ при гомотетии с центром в начале координат является точка $B\ (9; -27; -15)$. Найдите коэффициент гомотетии.

4.11. Найдите координаты образа точки $A\ (20; -35; -55)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии $k = \frac{3}{5}$.

4.12. Найдите значения x и y, при которых векторы $\vec{a}\ (x; y; 2)$ и $\vec{b}\ (-2; 3; 1)$ будут коллинеарны.

4.13. Найдите значения x и z, при которых векторы $\vec{m}\ (-1; 7; z)$ и $\vec{n}\ (x; 4; 5)$ будут коллинеарны.

4.14. Дан вектор $\vec{a}\ (3; 2; 1)$. Найдите коллинеарный ему вектор $\overrightarrow{AB}$, если $A\ (1; 1; 1)$, а точка B принадлежит плоскости yz.

4.15. Даны точки $A\ (-3; 6; 4)$, $B\ (6; -1; 2)$, $C\ (0; 3; -2)$. Найдите точку D, принадлежащую плоскости xz, такую, что $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

4.16. Дан вектор $\vec{a}\ (-2; 6; 3)$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, противоположно направленного с вектором $\vec{a}$, модуль которого равен 1.

4.17. Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}\ (1; -1; 2)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

4.18. Лежат ли на одной прямой точки:
1) $A\ (5; 6; -4)$, $B\ (7; 8; 2)$ и $C\ (3; 4; 14)$;
2) $D\ (-1; -7; -8)$, $E\ (0; -4; -4)$ и $F\ (2; 2; 4)$?

4.19. Точки A, B и C таковы, что $\overrightarrow{AB}\,(10; 15; -5)$ и $\overrightarrow{AC}\,(-6; y; z)$. При каких значениях y и z точки A, B и C лежат на одной прямой?

4.20. Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

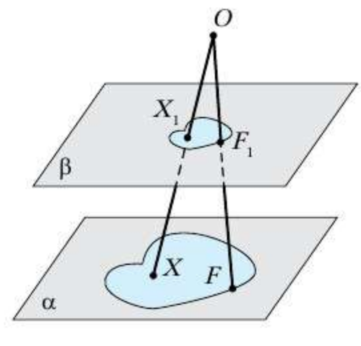
4.21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M – середина ребра A_1B_1, точка K – середина ребра CC_1. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E – середина ребра CC_1, точка F – середина ребра AD. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.23. Образом точки B (3; –4; 1) при гомотетии с центром A (–1; 2; 9) является точка B_1 (–2; 3,5; 11). Найдите образ C_1 точки C (19; –6; 37) при этой гомотетии.

4.24. Образом точки M (2; 3; –5) при гомотетии с центром A (1; 0; –1) является точка M_1 (4; 9; –13). Найдите прообраз K точки K_1 (16; –21; 2) при этой гомотетии.

Рис. 4.13



4.25. Плоскости α и β параллельны. Точка O не принадлежит этим плоскостям (рис. 4.13). Каждой точке X фигуры F, принадлежащей плоскости α, ставится в соответствие точка X_1 такая, что $X_1 = OX \cap \beta$. Докажите, что при таком преобразовании образом фигуры F является фигура F_1, гомотетичная фигуре F с центром O и коэффициентом, равным $\frac{h}{h_1}$, где h и h_1 – соответственно расстояния от точки O до плоскостей α и β.

4.26. Докажите, что при гомотетии образом окружности является окружность.

4.27. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь меньшего основания образовавшейся при этом усечённой пирамиды, если площадь основания данной пирамиды равна 48 см^2.

4.28. Высота пирамиды равна 25 см. Через точку M, принадлежащую высоте пирамиды, проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Площади оснований образовавшейся при этом усечённой пирамиды равны 12 см^2 и 75 см^2. Найдите расстояние от точки M до вершины данной пирамиды.

4.29. Дан тетраэдр $DABC$. Медианы грани ADB пересекаются в точке E, а медианы грани BDC – в точке F.

1) Докажите, что $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AC}$.

2) Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

4.30. Медианы грани ABC тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DO}$.

4.31. Точка M – середина ребра BC тетраэдра $DABC$, точка K – середина отрезка DM. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4.32. Точка M – середина ребра BC тетраэдра $DABC$. Выразите вектор $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4.33. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Диагонали грани CC_1D_1D пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.34. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре AD отметили точку M так, что $AM : MD = 1 : 3$, а на отрезке C_1D – точку K так, что $C_1K : KD = 3 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.35. Дан тетраэдр $DABC$. Точки M_1, M_2 и M_3 являются соответственно точками пересечения медиан граней ABD, BCD и ADC. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $M_1M_2M_3$ и точка D лежат на одной прямой.

4.36. Точки E и F являются серединами рёбер BC и AD тетраэдра $DABC$ соответственно. На отрезках BD, EF и AC отметили соответственно точки M, K и P так, что $DM : MB = FK : KE = AP : PC = 2 : 1$. Докажите, что точки M, K и P лежат на одной прямой.

4.37. Точки M, F и K – середины соответственно рёбер BC, AD и CD тетраэдра $DABC$. На отрезке AM отметили точку P, а на отрезке CF – точку E так, что $AP : PM = 4 : 1$, $CE : EF = 2 : 3$. Докажите, что прямые PE и BK параллельны.

4.38. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезках B_1C и BD взяли соответственно точки M и K так, что $B_1M : MC = 2 : 1$, $BK : KD = 1 : 2$. Докажите, что прямые MK и AC_1 параллельны.

Упражнения для повторения

4.39. Основание равнобедренного треугольника равно 48 см, а его площадь – 432 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

4.40. Концы хорды делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Найдите меньший вписанный угол, опирающийся на данную хорду.

4.41. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 5 см, а площадь основания относится к площади боковой грани как 3 : 7. Найдите высоту пирамиды.

§ 5. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два ненулевых и несонаправленных вектора. От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5.1). Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, что если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ (рис. 5.2).

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Итак, для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство

$$0^\circ \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180^\circ.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунке 5.3 изображена правильная треугольная призма. Имеем: $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}) = 60^\circ$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 120^\circ$, $\angle(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}) = 180^\circ$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}) = 0^\circ$.

Рис. 5.1

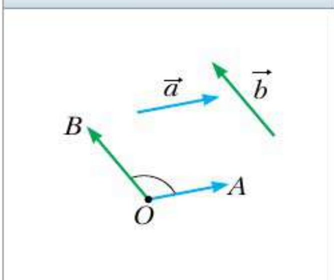


Рис. 5.2

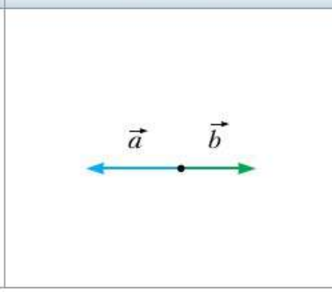
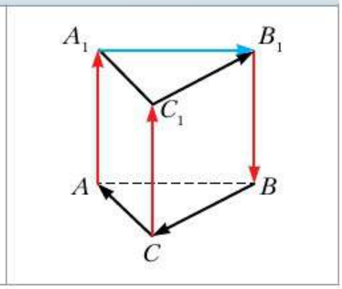


Рис. 5.3



Определение

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Имеем:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т. е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 5.1

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Например, на рисунке 5.3 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Теорема 5.2

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 5.3

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Свойства скалярного произведения векторов аналогичны соответствующим свойствам умножения чисел. ***Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:***

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$;

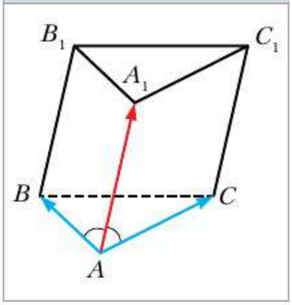
3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, по правилам преобразования алгебраических выражений. Например,

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=$$
$$=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Задача 1. Основанием наклонной призмы является равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Боковое ребро AA_1 образует равные острые углы с рёбрами AB и AC (рис. 5.4). Докажите, что $AA_1 \perp BC$.

Рис. 5.4

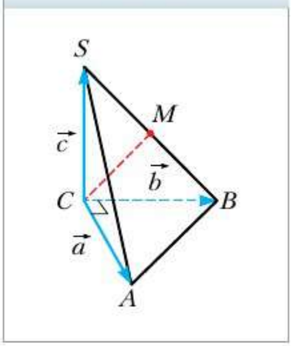


Решение. Пусть $\angle BAA_1 = \alpha$. С учётом условия можно записать: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Имеем: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Запишем: $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha-|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$. Поскольку $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$, то рассматриваемое скалярное произведение равно 0. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BC}$. ◄

Задача 2. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Ребро SC является высотой пирамиды. Найдите угол между прямыми AS и CM, где точка M – середина ребра SB, если $CA = CB = CS$.

Рис. 5.5



Решение. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CS}=\vec{c}$ (рис. 5.5). По условию $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$. Пусть $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=m$.

Имеем: $AS=\sqrt{CA^2+CS^2}=\sqrt{m^2+m^2}=m\sqrt{2}$, $CM=\frac{1}{2}SB=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+m^2}=\frac{1}{2}m\sqrt{2}$.

Запишем: $\overrightarrow{AS}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$.

Тогда $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c})$. Поскольку скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0, то $\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.

Имеем:

$$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\right|^2=\frac{1}{2}m^2.$$

Пусть угол между векторами $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{CM}$ равен α. Тогда $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=\left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CM}\right|\cos\alpha=m\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}m\sqrt{2}\cos\alpha=m^2\cos\alpha.$

Получили, что $m^2\cos\alpha=\frac{1}{2}m^2$, т. е. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Отсюда с учётом того, что $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$, получаем: $\alpha=60^\circ$. Следовательно, угол между прямыми AS и CM равен 60°.

Ответ: 60°. ◄

Заметим, что данную задачу можно решать методом координат: ввести систему координат с началом координат в точке C и осями, содержащими рёбра CA, CB и CS; найти координаты векторов $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{CM}$, а затем с помощью теоремы 5.2 найти их скалярное произведение. Реализуйте этот план самостоятельно.

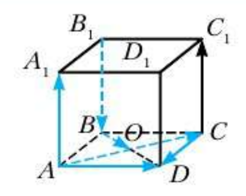
1. Опишите, как можно построить угол между двумя ненулевыми и несонаправленными векторами.
2. Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
3. Чему равен угол между двумя противоположно направленными векторами?
4. Чему равен угол между двумя сонаправленными векторами?
5. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
6. В каких пределах находится угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
7. Какие векторы называют перпендикулярными?
8. Что называют скалярным произведением двух векторов?
9. Что называют скалярным квадратом вектора?
10. Чему равен скалярный квадрат вектора?
11. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
12. Что следует из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$?
13. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
14. Как найти косинус угла между векторами, если известны их координаты?
15. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

Упражнения

5.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.6), точка O – центр грани $ABCD$. Чему равен угол между векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$?

Рис. 5.6



5.2. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 40°. Чему равен угол между векторами:

1) $2\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ и $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ и $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ и $10\vec{b}$?

5.3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

5.4. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

5.5. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Найдите:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

5.6. Угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 150°, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Найдите:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$.

5.7. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$.

5.8. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Вычислите скалярное произведение $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$.

5.9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(1; -2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$.

5.10. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(4; -1; 6)$, $\vec{b}\,(-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a}\,(1; -3; 9)$, $\vec{b}\,(-1; 3; 0)$.

5.11. Даны векторы $\vec{m}\,(3; -2; 4)$ и $\vec{n}\,(2; 2; z)$. При каком значении z выполняется равенство $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$?

5.12. Даны векторы $\vec{a}\,(9; c; -1)$ и $\vec{b}\,(-2; 3; c)$. При каком значении c выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$?

5.13. Среди векторов $\vec{a}\,(1; 1; 2)$, $\vec{b}\,(1; 2; 1)$ и $\vec{c}\,(-5; 3; 1)$ укажите пару перпендикулярных векторов.

5.14. При каком значении x векторы $\vec{a}\,(x; -x; 1)$ и $\vec{b}\,(x; 2; 1)$ перпендикулярны?

5.15. При каком значении p векторы $\vec{a}\,(p; -2; 1)$ и $\vec{b}\,(p; 1; -p)$ перпендикулярны?

5.16. Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a, точки M, K и P – соответственно середины рёбер AB, AD и CD. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{BC}$;

2) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{PM}$.

5.17. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точки E и F – соответственно середины рёбер AB и AD. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{C_1C}$;

2) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{C_1D}$; 4) $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{DC}$.

5.18. Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a, точка M – середина ребра AB. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

5.19. Каждое ребро правильной пирамиды $MABCD$ равно a. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5.20. Найдите угол между векторами $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

5.21. Найдите угол между векторами $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.

5.22. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, если $\vec{a}\,(2; -1; -2)$, $\vec{b}\,(4; -3; 2)$.

5.23. Найдите скалярный квадрат $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$, если $\vec{m}\,(2; 1; -3)$, $\vec{n}\,(4; -2; 0)$.

5.24. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A\,(3; -2; 1)$, $B\,(-1; 2; 1)$, $C\,(4; -1; 5)$, $D\,(1; 3; 0)$.

5.25. Вершинами треугольника являются точки $A\,(1; 0; 1)$, $B\,(-5; 4; 3)$, $C\,(0; 3; -1)$. Найдите угол A треугольника.

5.26. Каким треугольником, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, является треугольник с вершинами в точках A (0; 1; 2), B (–2; –1; 0) и C (1; 0; 1)?

5.27. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (1; 0; 2), B (–2; 4; 2) и C (3; 1; 0) является тупоугольным.

5.28. Даны точки A (0; –1; 1), B (–2; 0; –1) и C (–2; –1; 0). Найдите на оси z такую точку D, чтобы векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ были перпендикулярны.

5.29. Даны точки A (2; –1; 4), B (5; 1; 0) и C (6; 1; 3). Найдите на оси y такую точку D, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были перпендикулярны.

5.30. Известно, что $\vec{a} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$. Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

5.31. Известно, что $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{m} \perp \vec{n}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

5.32. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точка M – середина ребра B_1C_1. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1M}$; 2) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{A_1M}$.

5.33. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной a и острым углом 60° при вершине A. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

5.34. Точка M – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BM и BC_1.

5.35. Точка O – центр грани AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми OC и B_1D.

5.36. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K – соответственно середины рёбер AA_1 и AD, точка O – центр грани CC_1D_1D. Докажите, что прямые B_1K и MO перпендикулярны.

5.37. Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, $\angle DBA = \angle DBC$. Докажите, что $BD \perp AC$.

Упражнения для повторения

5.38. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 10 см, а радиус вписанной в неё окружности равен 4 см. Найдите площадь трапеции.

5.39. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{3}$ см, а угол при основании равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

5.40. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2 см, а диагональное сечение пирамиды равновелико основанию. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§ 6. Геометрическое место точек пространства. Уравнение плоскости

В курсе планиметрии вы ознакомились с понятием геометрического места точек. Аналогичное понятие рассматривают и в стереометрии.

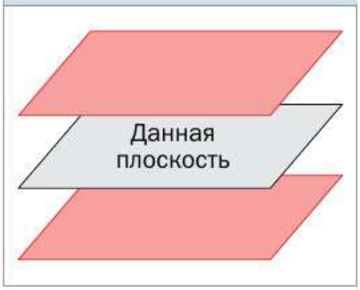
Определение

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество точек пространства, обладающих определённым свойством.

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом все точки пространства, обладающие этим свойством, красят в красный цвет. Та «красная фигура», которая при этом образовалась, и будет ГМТ.

Например, геометрическим местом точек, удалённых от данной плоскости на заданное расстояние, являются две плоскости, параллельные данной (рис. 6.1).

Рис. 6.1



ГМТ, равноудалённых от трёх данных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, является прямая l, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через точку O – центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 6.2).

Действительно, точка O равноудалена от точек A, B и C. Каждая точка X прямой l, отличная от точки O, также равноудалена от точек A, B и C

Рис. 6.2

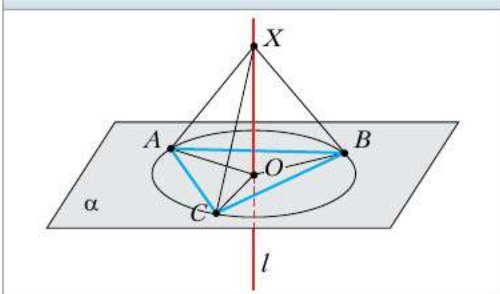
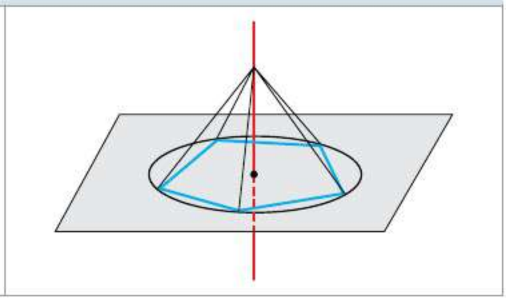


Рис. 6.3



(это следует из равенства треугольников XOA, XOB, XOC). И наоборот, если точка X равноудалена от точек A, B и C, то она принадлежит прямой l. Это следует из ключевой задачи 1 в § 10 учебника «Геометрия. 10 класс».

Точно так же доказывается, что ГМТ, равноудалённых от вершин данного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность, является прямая, перпендикулярная плоскости этого многоугольника и проходящая через центр его описанной окружности (рис. 6.3).

Напомним: чтобы утверждать, что какое-то множество точек является ГМТ, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) *каждая точка данного множества обладает заданным свойством*;

2) *если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству*.

Теорема 6.1

Плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину, является ГМТ, равноудалённых от концов этого отрезка.

Доказательство

Пусть плоскость α перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину — точку M.

Пусть X — произвольная точка плоскости α. Докажем, что $XA = XB$.

Если точка X совпадает с точкой M, то $XA = XB$.

Пусть точка X не совпадает с точкой M (рис. 6.4). Тогда в плоскости AXB прямая MX является серединным перпендикуляром отрезка AB. Следовательно, $XA = XB$.

Пусть некоторая точка Y равноудалена от концов отрезка AB. Тогда в плоскости AYB прямая MY является серединным перпендикуляром отрезка AB. Предположим, что $Y \notin \alpha$. Пусть $AYB \cap \alpha = a$ (рис. 6.5). Очевидно, что $AB \perp a$. Тогда в плоскости AYB через точку M проходят две пря-

Рис. 6.4

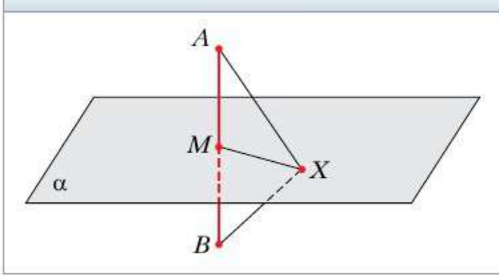
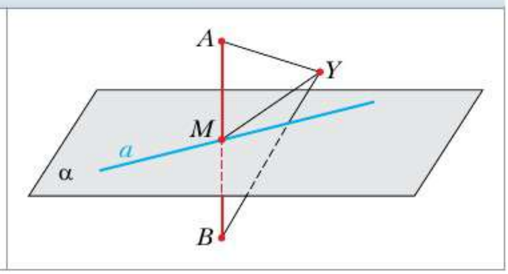


Рис. 6.5



мые, перпендикулярные прямой AB. Получили противоречие. Значит, $Y \in \alpha$. ◄

Определение

Биссектором двугранного угла называют полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, и делящую его на два равных двугранных угла (рис. 6.6).

Биссектор является пространственным аналогом биссектрисы угла.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ полуплоскость, содержащая диагональное сечение AA_1C_1C, является биссектором двугранного угла куба при ребре AA_1 (рис. 6.7).

Рис. 6.6

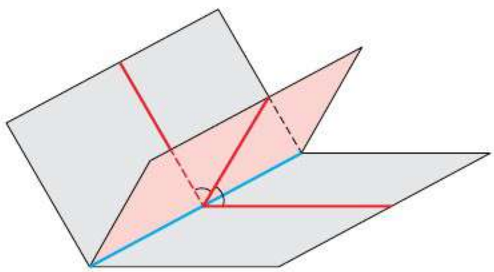
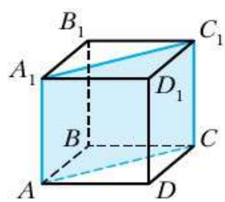


Рис. 6.7



Теорема 6.2

Биссектор двугранного угла является ГМТ, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней.

Эта теорема является пространственным аналогом теоремы о ГМТ угла, равноудалённых от его сторон. Докажите эту теорему самостоятельно.

Из курса планиметрии вы знакомы с понятием уравнения фигуры, заданной на координатной плоскости. Аналогично можно рассматривать уравнение фигуры в пространстве.

Рассмотрим уравнение с тремя переменными:

$$P(x; y; z) = 0.$$

Его решениями являются упорядоченные тройки чисел $(x; y; z)$. Например, тройка чисел $(-1; -1; 1)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Действительно, если вместо переменных x, y, z подставить соответственно их значения -1, -1, 1, то получим верное числовое равенство.

Определение

Уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz, называют уравнение с тремя переменными x, y, z, обладающее следующими свойствами:
1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты $(x; y; z)$ являются решением данного уравнения;
2) любое решение $(x; y; z)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Теорема 6.3

Уравнение плоскости имеет вид

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

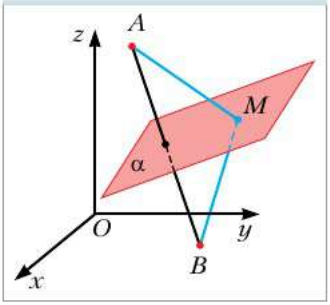
где a, b, c и d — некоторые числа, причём a, b и c не равны нулю одновременно.

Доказательство

Для того чтобы вывести уравнение плоскости, рассмотрим её как ГМТ, равноудалённых от двух данных точек.

Пусть α – данная плоскость. Выберем две точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ такие, чтобы плоскость α была перпендикулярна отрезку AB и проходила через его середину (рис. 6.8).

Рис. 6.8



Пусть $M\ (x; y; z)$ – произвольная точка плоскости α. Тогда в силу теоремы 6.1 $MA = MB$, т. е.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x; y; z)$ произвольной точки M плоскости α являются решением уравнения $(*)$.

Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – произвольное решение уравнения $(*)$. Тогда

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}.$$

Это равенство означает, что точка $N\ (x_0; y_0; z_0)$ равноудалена от точек $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$. Следовательно, в силу теоремы 6.1 $N \in \alpha$.

Итак, мы доказали, что уравнение $(*)$ является уравнением плоскости α. Преобразуем это уравнение. Имеем:
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$

Возведём все двучлены в квадрат и приведём подобные слагаемые. Получим:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2.$$

Обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $2(z_2 - z_1) = c$, $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = -d$, получим уравнение $ax + by + cz + d = 0$.

Поскольку точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ не равна нулю. Значит, числа a, b, c не равны нулю одновременно. ◄

Очевидно, что если уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz = 0$, то эта плоскость проходит через начало координат.

Будем говорить, что ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ **перпендикулярен** прямой a (плоскости α), если прямая AB перпендикулярна прямой a (плоскости α). Пишут: $\overrightarrow{AB} \perp a$, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$.

Теорема 6.4

Вектор $\overrightarrow{AB}$ $(a; b; c)$ перпендикулярен плоскости α, уравнение которой имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

Доказательство

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\overrightarrow{MN}$, принадлежащий плоскости α (рис. 6.9). Пусть точки M и N имеют соответственно координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Поскольку точки M и N принадлежат плоскости α, то выполняются равенства

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0.$$

Вычтем из второго равенства первое. Получим:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$

Из этого равенства следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярны. Тем самым мы показали, что вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен произвольной прямой MN, принадлежащей плоскости α. Следовательно, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. ◄

Задача. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2 дм, а боковое ребро — 1 дм. Докажите, что прямая OB_1 перпендикулярна плоскости MD_1N, где точка O — центр нижнего основания, точки M и N — середины соответственно рёбер AD и CD.

Решение. Рассмотрим систему координат с началом координат в точке D и осями с единичным отрезком 1 дм, содержащими рёбра DA, DC и DD_1 (рис. 6.10). Точки M, N и D_1 имеют соответственно координаты (1; 0; 0), (0; 1; 0) и (0; 0; 1).

Рис. 6.9

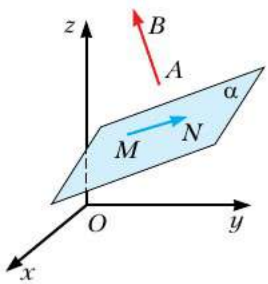
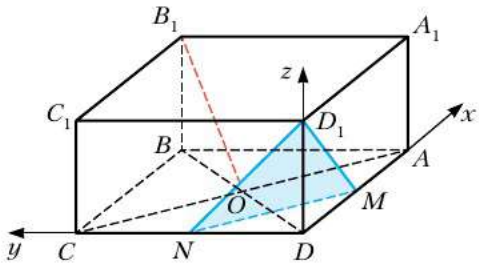


Рис. 6.10



Пусть уравнение плоскости MD_1N имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Подставим в это уравнение координаты точек M, N и D_1. Получим: $a + d = 0$, $b + d = 0$, $c + d = 0$. Отсюда $a = b = c = -d$. Тогда уравнение плоскости MD_1N приобретает такой вид: $-dx - dy - dz + d = 0$.

Поскольку плоскость MD_1N не проходит через начало координат, то $d \neq 0$. Тогда $-x - y - z + 1 = 0$. Следовательно, уравнение плоскости MD_1N имеет вид $x + y + z - 1 = 0$.

Точки O и B_1 имеют соответственно координаты (1; 1; 0) и (2; 2; 1). Тогда вектор $\overrightarrow{OB_1}$ имеет координаты (1; 1; 1). В силу теоремы 6.4 вектор $\overrightarrow{OB_1}$ перпендикулярен плоскости MD_1N. ◄

1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы можно было утверждать, что некоторое множество точек является геометрическим местом точек?
3. Что является геометрическим местом точек, удалённых от данной плоскости на заданное расстояние?
4. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой?
5. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка?
6. Что называют биссектором двугранного угла?

7. Что является геометрическим местом точек, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней?
8. Что называют уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz?
9. Какой вид имеет уравнение плоскости?
10. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через начало координат?
11. Какой вектор $\overrightarrow{AB}$ называют перпендикулярным прямой a? плоскости α?
12. Какой вид имеет уравнение плоскости, которой перпендикулярен вектор $\overrightarrow{AB}$ $(a; b; c)$?

Упражнения

6.1. Принадлежит ли плоскости $3x - 2y + z + 4 = 0$ точка:
1) A (1; 2; –5); 2) B (4; –8; –4); 3) C (5; –1; –21)?

6.2. Точка A принадлежит биссектору двугранного угла и удалена от его граней на $\sqrt{6}$ см, а от ребра двугранного угла – на $2\sqrt{2}$ см. Найдите данный двугранный угол.

6.3. Точка B принадлежит биссектору прямого двугранного угла и удалена от его граней на 4 см. Найдите расстояние от точки B до ребра двугранного угла.

6.4. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от точек данной окружности.

6.5. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от сторон квадрата.

6.6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A (3; –1; 2) и перпендикулярной прямой BC, если:
1) B (2; 0; –3), C(4; –1; –5);
2) B (6; –7; –2), C (9; –5; 1).

6.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{m}$ (–8; 4; 12).

6.8. Составьте уравнение плоскости, если точка A (4; 3; –6) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость.

6.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (0; 4; 0) и перпендикулярной оси ординат.

6.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку K (0; 0; –3) и параллельной плоскости xy.

6.11. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек M $(-6; 3; 5)$ и N $(4; -7; 1)$.

6.12. Даны точки M $(3; a; -5)$ и K $(7; 1; a)$. При каком значении a прямая MK параллельна плоскости $4x - 3y + z - 6 = 0$?

6.13. Параллельны ли плоскости:

1) $x + 3y + 4z - 6 = 0$ и $3x + 9y + 12z - 12 = 0$;

2) $x - 6y + 5z - 2 = 0$ и $2x + 3y - 4z + 6 = 0$?

6.14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M $(2; 3; -9)$ параллельно плоскости $x + y - 5z + 3 = 0$.

6.15. Найдите угол между плоскостями $2x - y + z - 3 = 0$ и $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

6.16. Перпендикулярны ли плоскости:

1) $2x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - 2y - 4z - 9 = 0$;

2) $6x - y + 8 = 0$ и $y - 6z - 8 = 0$?

6.17. Найдите уравнение образа плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$:

1) при симметрии относительно начала координат;

2) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(5; -2; -1)$.

6.18. Найдите уравнение образа плоскости $x + y - z + 3 = 0$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $k = -2$.

6.19. Докажите, что уравнение плоскости, параллельной оси аппликат, имеет вид $ax + by + d = 0$. Какой вид имеет уравнение плоскости, параллельной: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат?

6.20. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A $(1; -2; 1)$ и B $(4; 1; 3)$ параллельно оси y.

6.21. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки C $(-2; 0; 1)$ и D $(1; 5; 0)$ параллельно оси x.

6.22. Найдите расстояние от точки A $(1; 2; -3)$ до плоскости $x + 3y + 2z - 29 = 0$.

6.23. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $2x - y + 5z + 15 = 0$.

6.24. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A $(1; 2; 3)$, B $(4; 1; 2)$ и C $(2; -1; 1)$.

6.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4 см. Точки M и K – середины рёбер AD и BB_1 соответственно. На ребре CD отметили точку E, а на его продолжении за точку D – точку F так, что $DE = 1$ см, а точка D – середина отрезка CF. Докажите, что прямая KF перпендикулярна плоскости MD_1E.

6.26. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1D_1.

Упражнения для повторения

6.27. Основания равнобокой трапеции равны 10 см и 24 см, а высота – 17 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

6.28. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MC = 4 : 5$, $BK : KC = 1 : 3$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке D, $DK = 10$ см. Найдите отрезок AD.

6.29. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной пирамиды, равен 6 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Когда сделаны уроки

Четырёхмерный куб

Читая фантастические рассказы, вы, конечно, встречались с историями, когда путешественники за доли секунды преодолевали значительные расстояния, воспользовавшись «движением по гиперпространству». Вероятно, вы также слышали, что в математике изучают геометрию не только двумерного (планиметрия) или трёхмерного (стереометрия) пространства, но и пространств большей размерности, о которых и идёт речь в фантастических произведениях.

Оказывается, изученные вами понятия координат и векторов могут служить замечательным инструментом для исследования многомерных пространств. В этом рассказе мы поговорим о четырёхмерном пространстве.

Вы знаете, что каждой точке координатной прямой (одномерного пространства) соответствует число x – координата этой точки (рис. 6.11). Каждой точке двумерного пространства можно поставить в соответствие пару чисел $(x; y)$ – координаты этой точки (рис. 6.12). Каждой точке трёх-

Рис. 6.11

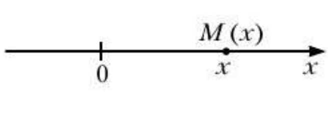
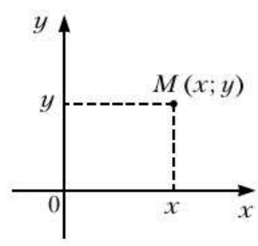


Рис. 6.12



мерного пространства можно поставить в соответствие тройку чисел (x; y; z) – координаты этой точки (рис. 6.13). Аналогично рассуждают и о точке четырёхмерного пространства.

Определение

Точкой четырёхмерного пространства называют четвёрку чисел (x; y; z; t).

Числа x, y, z и t называют соответственно первой, второй, третьей и четвёртой координатами точки.

Поскольку точку четырёхмерного пространства определяют через её координаты, то попробуем представить систему координат четырёхмерного пространства. Конечно, рассуждать о четырёхмерном пространстве непросто, поскольку в нашем бытовом опыте мы не встречаемся с такими объектами. Тем не менее переход от трёхмерного пространства к четырёхмерному легче осуществить, если проследить за аналогичными переходами от одномерного пространства к двумерному и от двумерного к трёхмерному.

В одномерном пространстве система координат задаётся одной координатной прямой – осью x (см. рис. 6.11). Для построения системы координат на плоскости к этой прямой через её начало отсчёта проводят перпендикулярную координатную прямую – ось y (рис. 6.14). В стереометрии добавляется ещё одна координатная прямая – ось z, перпендикулярная каждой из двух других осей. Систему координат трёхмерного пространства изображают на плоскости (рис. 6.15). При этом нас не смущает то, что на изображении (см. рис. 6.15) фактический угол, например между осями x и z, отличается от прямого.

Рис. 6.13

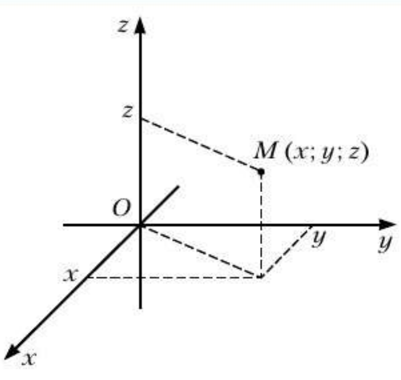


Рис. 6.14

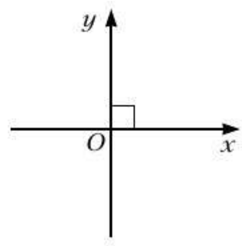
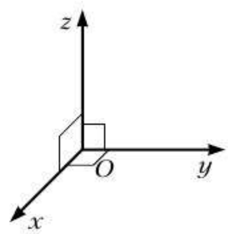


Рис. 6.15



Точно так же для построения системы координат в четырёхмерном пространстве через начало трёхмерной системы координат нужно провести ещё одну прямую – четвёртую координатную ось t, перпендикулярную каждой из трёх других осей. На рисунке 6.16 изображена на плоскости система координат четырёхмерного пространства. Отметим, что, находясь только в трёхмерном пространстве, такую четвёртую прямую провести невозможно, точно так же, как на плоскости невозможно провести третью прямую, перпендикулярную двум осям двумерной системы координат.

Если из четырёх координатных осей x, y, z, t выбрать любые три, например x, z, t, то получится привычная трёхмерная система координат (рис. 6.17).

Рис. 6.16

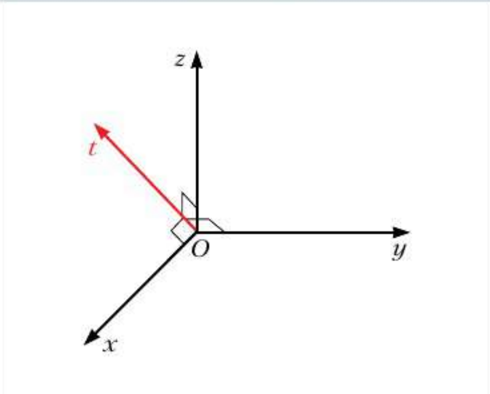
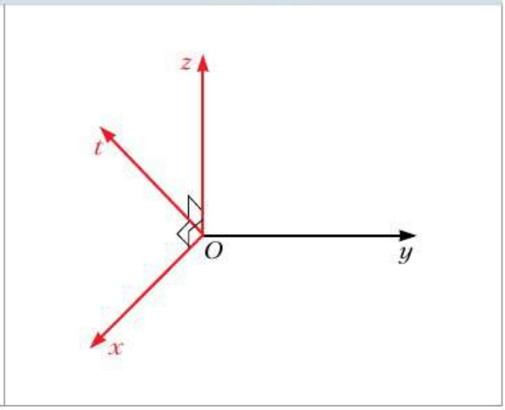


Рис. 6.17



Попытаемся в четырёхмерной системе координат изобразить четырёхмерный куб – четырёхмерный аналог квадрата на плоскости и куба в пространстве. Для этого опять будем рассуждать, переходя от одномерного пространства к двух-, трёх- и, наконец, к четырёхмерному.

Отметим на координатной прямой x отрезок AB длиной 1 (рис. 6.18, *а*). Координаты x точек этого отрезка удовлетворяют двойному неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Разместим этот же отрезок в двумерном пространстве xy (рис. 6.18, *б*). Будем параллельно переносить этот отрезок в направлении оси y (рис. 6.18, *в*). Если отрезок AB переносить на 1 в направлении оси y, то можно увидеть, как образуется квадрат (рис. 6.18, *г*). При этом исходный отрезок AB будет стороной этого квадрата.

Рассмотрим теперь квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1 (рис. 6.19, *а*). Координаты $(x; y)$ точек этого квадрата удовлетворяют систе-

Рис. 6.18

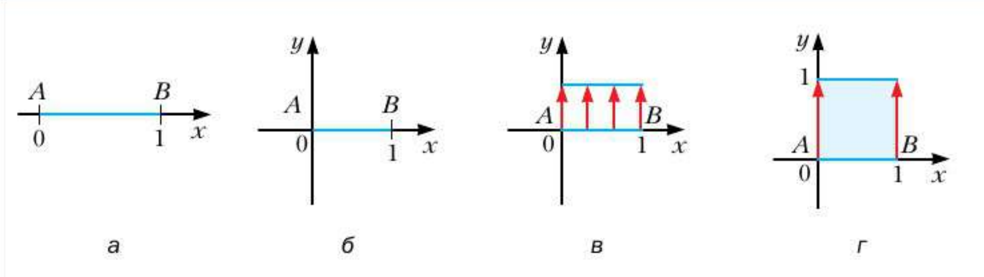
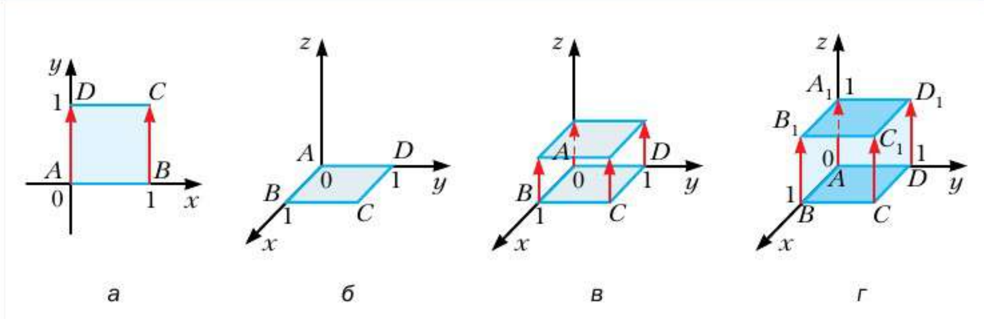


Рис. 6.19



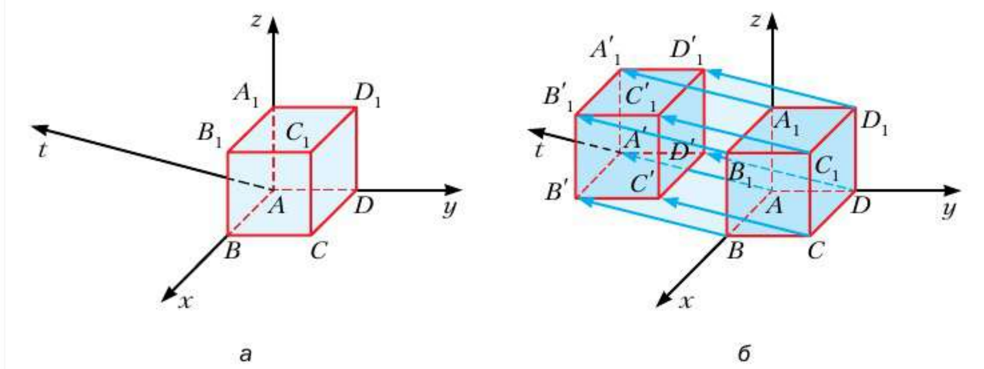
ме $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$ Разместим этот же квадрат в трёхмерном пространстве xyz (рис. 6.19, *б*).

Будем параллельно переносить квадрат $ABCD$ в направлении оси z (рис. 6.19, *в*). Тогда можно увидеть, как образуется куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.19, *г*). При этот исходный отрезок AB будет ребром этого куба, а квадрат $ABCD$ – гранью куба.

Для построения четырёхмерного куба будем опираться на подмеченную закономерность. Рассмотрим трёхмерный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в четырёхмерном пространстве $xyzt$ (рис. 6.20, *а*). Координаты $(x;\ y;\ z)$ точек этого куба удовлетворяют системе $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$ Будем параллельно переносить этот куб в направлении оси t. Если куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перенести на 1 в направлении оси t, то получим четырёхмерный куб

$ABCDA_1B_1C_1D_1A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ (рис. 6.20, *б*). При этом исходный отрезок AB будет его ребром, квадрат $ABCD$ – гранью, а куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – так называемой **гипергранью**. Координаты $(x; y; z; t)$ точек этого четырёхмерного куба удовлетворяют системе $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

Рис. 6.20



Можно подсчитать, что четырёхмерный куб имеет 16 вершин, 32 ребра (одномерных отрезка), 24 грани (двумерных квадрата) и 8 гиперграней (трёхмерных кубов). Чтобы лучше разобраться с геометрией четырёхмерного куба, попробуйте самостоятельно найти координаты вершин, а также координаты точек, лежащих на рёбрах, гранях и гипергранях этого куба.

Итоги главы 1

Расстояние между точками

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ можно найти по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты середины отрезка

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Взаимное расположение двух векторов

- Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.
- Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.
- Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Координаты вектора

Если точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Операции с векторами

- Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

  Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

- Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что: 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.
- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.
- Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.
- Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то:
- координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$;
- скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые).

Гомотетия

Пусть точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$. В этом случае говорят, что точка X_1 — образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k. Точку O называют центром гомотетии, число k — коэффициентом гомотетии.

Преобразование фигуры F, при котором каждой точке X фигуры F ставят в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k, называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.

Биссектор двугранного угла

Биссектором двугранного угла называют делящую его на два равных двугранных угла полуплоскость, и границей которой является ребро двугранного угла.

Фигуры в пространстве как ГМТ

Плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину, является ГМТ, равноудалённых от концов этого отрезка.

Биссектор двугранного угла является ГМТ, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней.

Уравнение фигуры

Уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz, называют уравнение с тремя переменными x, y, z, обладающее следующими свойствами:

1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты $(x; y; z)$ являются решением данного уравнения;

2) любое решение $(x; y; z)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Уравнение плоскости

Уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c и d — некоторые числа, причём a, b и c не равны нулю одновременно.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ $(a; b; c)$ перпендикулярен плоскости α, уравнение которой имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

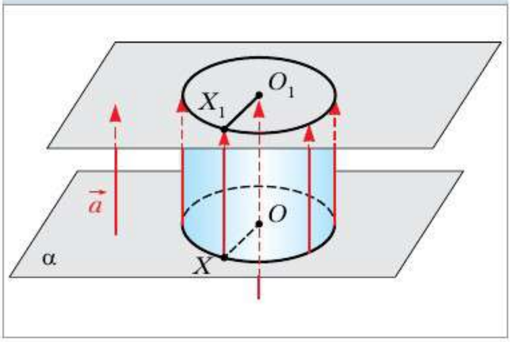
Глава 2. Тела вращения

В этой главе вы подробнее ознакомитесь с уже известными вам телами – цилиндром, конусом, шаром, изучите их свойства. Узнаете, каким бывает взаимное расположение этих тел и многогранников.

§ 7. Цилиндр

Пусть вектор $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости α. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ окружности, принадлежащей плоскости α. Образом этой окружности является равная ей окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости α (рис. 7.1). Пусть X – произвольная точка окружности с центром в точке O, а точка X_1 – образ точки X при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Тогда $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ и точка X_1 принадлежит окружности с центром в точке O_1. Следовательно, все отрезки, которые параллельны вектору $\vec{a}$ и концы которых лежат на рассматриваемых окружностях, равны между собой и перпендикулярны плоскости α. Эти отрезки образуют некоторую фигуру F.

Рис. 7.1



Окружности с центрами O и O_1 ограничивают два равных круга. Тело, ограниченное этими кругами и фигурой F, называют **цилиндром**. Фигуру F называют **боковой поверхностью цилиндра**, круги – **основаниями цилиндра**, отрезки, образующие фигуру F, – **образующими цилиндра** (рис. 7.2).

Очевидно, что все образующие цилиндра равны и перпендикулярны плоскости основания.

Прямую, проходящую через центры оснований цилиндра, называют **осью цилиндра**. На рисунке 7.1 прямая OO_1 – ось цилиндра. Отрезок оси цилиндра, заключённый между его основаниями, перпендикулярен основаниям и равен образующей цилиндра. На рисунке 7.1 $OO_1 = XX_1$.

Высотой цилиндра называют перпендикуляр, проведённый из любой точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Любая образующая цилиндра является его высотой. На рисунке 7.2 отрезки OO_1 и XX_1 – высоты цилиндра.

Из курса планиметрии вы знакомы с таким преобразованием фигуры, как поворот вокруг точки. Аналогом такого преобразования в пространстве является поворот фигуры вокруг прямой. Мы не будем давать строгого определения этого преобразования, а расскажем о нём, опираясь на наглядность и интуицию.

Рассмотрим в пространстве прямую a и не принадлежащую ей точку A. Проведём через точку A плоскость α, перпендикулярную прямой a. Пусть эта плоскость пересекает прямую a в точке O (рис. 7.3). В плоскости α рассмотрим точку A_1, являющуюся образом точки A при повороте вокруг точки O на угол φ. В этом случае говорят, что точка A_1 получена в результате **поворота** точки A **вокруг прямой** a **на угол** φ. Пара точек A и A_1 определяет **направление** поворота вокруг прямой a на угол φ.

Рис. 7.2

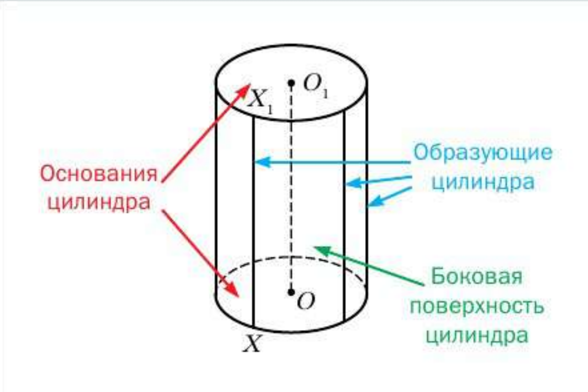
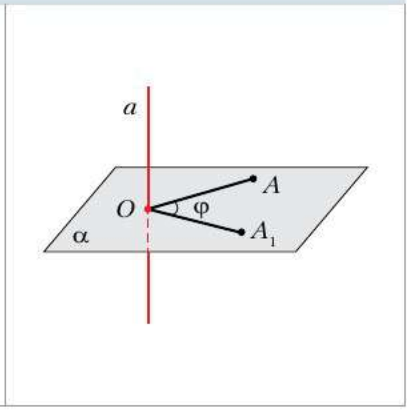
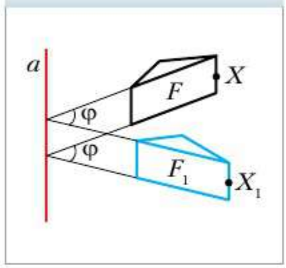


Рис. 7.3



Пусть даны в пространстве фигура F и прямая a. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при повороте в одном направлении вокруг прямой a на угол φ (если $X \in a$, то образом точки X будем считать саму точку X). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 7.4). Такое преобразование фигуры F называют **поворотом вокруг прямой** a. Прямую a называют **осью вращения**.

Рис. 7.4



С процессами и явлениями, иллюстрирующими подобные преобразования, мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, вращение

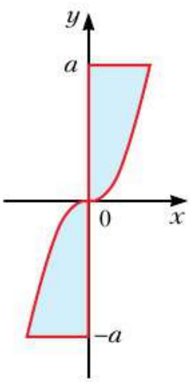
Рис. 7.5

флюгера, движение лопастей винта вертолёта, открытие и закрытие двери и т. п. (рис. 7.5).

Пусть даны фигура F и прямая a, лежащие в одной плоскости. Рассмотрим все точки, полученные в результате поворота точек фигуры F вокруг прямой a на произвольные углы. Если множество полученных точек является телом, то его называют **телом вращения**.

Например, если вращать вокруг оси ординат фигуру, лежащую в плоскости xy и ограниченную осью ординат, прямыми $y = a$ и $y = -a$ и графиком функции $y = x^3$ (рис. 7.6, a), то получим тело, форма которого напоминает песочные часы (рис. 7.6, $б$).

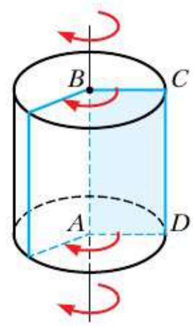
Рис. 7.6



а

б

Рис. 7.7



Любое тело вращения имеет ось симметрии. Ею является ось вращения.

Цилиндр можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону.

На рисунке 7.7 изображён цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB. При вращении стороны CD образуется боковая поверхность цилиндра, а при вращении сторон BC и AD – основания цилиндра.

Любые две образующие AA_1 и BB_1 цилиндра параллельны. Следовательно, через прямые AA_1 и BB_1 можно провести плоскость. Рассмотрим четырёхугольник AA_1B_1B, являющийся сечением цилиндра этой плоскостью (рис. 7.8). Поскольку $AA_1 = BB_1$, то четырёхугольник AA_1B_1B – параллелограмм. Так как образующая цилиндра перпендикулярна плоскости основания, то $AA_1 \perp AB$. Таким образом, сечением цилиндра плоскостью, проходящей через две его образующие, является прямоугольник.

Если пересечь цилиндр плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется прямоугольник, две стороны которого – диаметры оснований цилиндра, а две другие – образующие цилиндра (рис. 7.9). Такое сечение называют **осевым сечением цилиндра**. Плоскость, содержащая осевое сечение цилиндра, является его плоскостью симметрии.

Пересечём цилиндр плоскостью, параллельной основаниям цилиндра. Пусть эта плоскость пересекает ось OO_1 цилиндра в точке K (рис. 7.10). Образовавшаяся в сечении фигура – это образ основания с центром O при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OK}$. Следовательно, сечением цилиндра плоскостью, параллельной основаниям (или перпендикулярной оси цилиндра), является круг, равный основанию.

Рис. 7.8

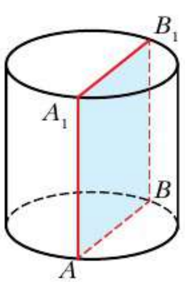


Рис. 7.9

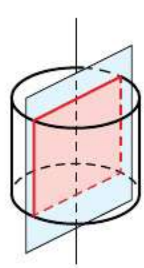
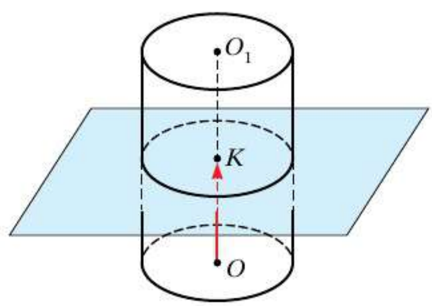


Рис. 7.10



Представим себе, что поверхность цилиндра разрезали по окружностям оснований и некоторой образующей (рис. 7.11), а затем развернули на плоскости. Полученную фигуру называют **развёрткой цилиндра на плоскость** или просто **развёрткой цилиндра**. Она состоит из двух кругов, равных основаниям цилиндра, и прямоугольника, который называют **развёрткой боковой поверхности цилиндра** (рис. 7.12).

Рис. 7.11

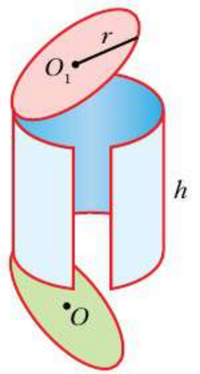
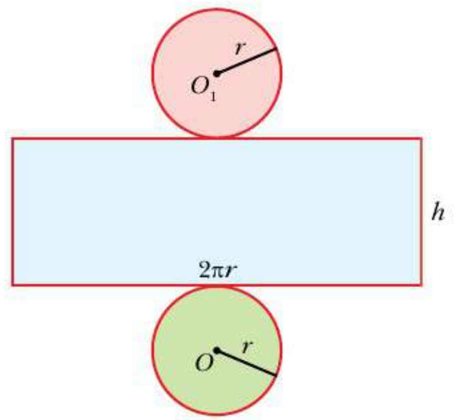


Рис. 7.12



Если образующая цилиндра равна h, а радиус основания цилиндра – r, то стороны развёртки боковой поверхности цилиндра равны h и $2\pi r$.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь развёртки его боковой поверхности. Следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh,$$

где $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности цилиндра, r – радиус основания цилиндра, h – длина высоты цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называют сумму площадей боковой поверхности цилиндра и двух оснований. Имеем:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь полной поверхности цилиндра, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания цилиндра.

Площадь основания цилиндра равна πr^2. Тогда получаем формулу

$$S_{\text{полн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Из курса геометрии 10 класса вы знаете, что параллельной проекцией окружности является фигура, которую называют эллипсом. Поэтому, изображая цилиндр, его основания рисуют в виде эллипсов. На практике для изображения эллипсов удобно пользоваться лекалами (рис. 7.13).

Задача. Точки A и B лежат на окружностях разных оснований цилиндра так, что прямая AB образует с плоскостью основания угол, равный $60°$. Через точку A провели осевое сечение AA_1D_1D (рис. 7.14). Найдите расстояние между прямыми AB и D_1D, если радиус основания цилиндра равен 5 см и $AB = 16$ см.

Рис. 7.13

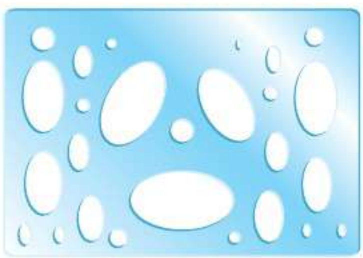
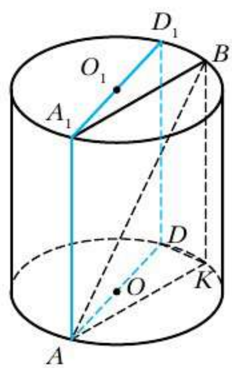


Рис. 7.14



Решение. Проведём образующую BK цилиндра. Поскольку образующие цилиндра перпендикулярны плоскости основания, то они параллельны. Следовательно, точки A, A_1, B и K принадлежат одной плоскости.

Имеем: $DD_1 \parallel BK$. Значит, $DD_1 \parallel AA_1B$. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми AB и D_1D равно расстоянию между прямой D_1D и плоскостью AA_1B. Поэтому достаточно найти длину перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой D_1D на плоскость AA_1B.

Соединим точки D и K. Вписанный угол DKA опирается на диаметр AD. Следовательно, $DK \perp AK$. Поскольку $BK \perp ADK$, то $BK \perp DK$. Получили, что прямая DK перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AA_1B. Следовательно, $DK \perp AA_1B$. Значит, длина отрезка DK – искомое расстояние.

Прямая AK является проекцией прямой AB на плоскость основания цилиндра. Следовательно угол BAK – угол между прямой AB и плоскостью основания. По условию $\angle BAK = 60^\circ$.

В треугольнике ABK ($\angle BKA = 90^\circ$): $AK = AB\cos 60^\circ = 8$ (см).

В треугольнике ADK ($\angle AKD = 90^\circ$): $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 64} =$ $= 6$ (см).

Ответ: 6 см. ◀

1. Какое тело называют цилиндром?
2. Опишите, что называют боковой поверхностью цилиндра.
3. Что называют основаниями цилиндра?
4. Какое тело называют телом вращения?
5. Что называют осевым сечением цилиндра?
6. Из каких фигур состоит развёртка цилиндра?
7. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности цилиндра?
8. По какой формуле вычисляют площадь полной поверхности цилиндра?

Упражнения

7.1. Высота цилиндра равна 6 см, а радиус основания – 5 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

7.2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 128 см^2. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 4 см.

7.3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и образует с плоскостью основания цилиндра угол α. Найдите: 1) высоту цилиндра; 2) площадь основания цилиндра.

7.4. Площадь основания цилиндра равна 49π см^2, а угол между диагональю осевого сечения и образующей цилиндра равен 30°. Найдите высоту цилиндра.

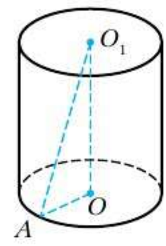
7.5. Чему равна площадь боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 2 см, а высота – 9 см?

7.6. Прямоугольник со сторонами 1 см и 3 см вращают вокруг большей стороны. Найдите: 1) диагональ осевого сечения образовавшегося цилиндра; 2) площадь полной поверхности этого цилиндра.

7.7. Квадрат со стороной 8 см вращают вокруг одной из его сторон. Найдите: 1) площадь осевого сечения образовавшегося цилиндра; 2) площадь полной поверхности этого цилиндра.

7.8. Точки O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований цилиндра соответственно (рис. 7.15). Точка A – произвольная точка окружности, ограничивающей нижнее основание цилиндра. Отрезок O_1A равен 6 см и образует с плоскостью основания цилиндра угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Рис. 7.15



7.9. Высота цилиндра равна 5 см, а диаметр основания – 24 см. Найдите расстояние от центра одного основания цилиндра до точки окружности другого основания.

7.10. Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра равна d и образует с одной из сторон развёртки угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.11. Квадрат, диагональ которого равна 4π см, является развёрткой боковой поверхности цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.

7.12. Как изменится, увеличится или уменьшится, и во сколько раз площадь боковой поверхности цилиндра, если:

1) радиус его основания увеличить в k раз;

2) высоту цилиндра уменьшить в k раз;

3) высоту цилиндра увеличить в k раз, а радиус основания – уменьшить в k раз?

Какой функцией является зависимость площади боковой поверхности цилиндра от: 1) радиуса его основания; 2) высоты цилиндра?

7.13. Диаметр основания цилиндра больше его высоты, а угол между диагоналями осевого сечения равен α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна S.

7.14. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна S.

7.15. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом 120°, а из центра верхнего основания – под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если длина данной хорды равна 6 см.

7.16. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом 90°, а из центра верхнего основания – под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус его основания равен 8 см.

7.17. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов проведённой хорды, образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если расстояние от центра нижнего основания до проведённой хорды равно a.

7.18. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания и середину данной хорды, равен m и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.19. Вокруг какой из сторон прямоугольника, большей или меньшей, надо его вращать, чтобы получить цилиндр с большей площадью: 1) боковой поверхности; 2) полной поверхности?

7.20. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен 10 см, а высота – 12 см, проведено сечение, являющееся квадратом. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

7.21. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью основания угол β, а радиус основания равен R. Найдите площадь сечения.

7.22. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, удалённое от неё на $\sqrt{3}$ см и отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна 120°. Найдите площадь сечения, если его диагональ равна 10 см.

7.23. Точки O и O_1 – центры соответственно нижнего и верхнего оснований цилиндра, точка A принадлежит нижнему основанию цилиндра (рис. 7.16). На отрезке OO_1 отмечена точка B так, что прямая AB пересекает боковую поверхность цилиндра. Постройте точку пересечения прямой AB с боковой поверхностью цилиндра.

7.24. Радиус основания цилиндра равен 9 см. Из середины отрезка OO_1, где точки O и O_1 – центры соответственно нижнего и верхнего оснований цилиндра, проведён луч, пересекающий плоскость нижнего основания в точке, удалённой от центра этого основания на 12 см. Этот луч пересекает образующую цилиндра в точке, удалённой от плоскости нижнего основания на 2 см. Найдите высоту цилиндра.

7.25. Высота цилиндра равна 20 см. Через середину образующей цилиндра проведена прямая, пересекающая отрезок, соединяющий центры оснований, в точке, удалённой на 6 см от плоскости нижнего основания, а саму эту плоскость – в точке, удалённой на 15 см от центра нижнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.

7.26. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом. Найдите угол между диагоналями осевого сечения цилиндра.

7.27. Угол между диагональю развёртки боковой поверхности цилиндра и стороной развёртки, равной длине окружности основания цилиндра, равен α. Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.

7.28. Концы отрезка AB, равного 15 см, принадлежат окружностям разных оснований цилиндра. Найдите расстояние между прямой AB и осью цилиндра, если высота цилиндра равна 9 см, а радиус его основания – 8 см.

7.29. Точки O и O_1 – соответственно центры нижнего и верхнего оснований цилиндра, точка A принадлежит окружности нижнего основания цилиндра, а точка B – окружности верхнего основания. Угол между прямыми OA и O_1B равен 60°. Найдите угол между прямыми AB и OO_1, если диаметр основания цилиндра равен его высоте.

7.30. Прямоугольник MM_1N_1N – сечение цилиндра, параллельное его оси (рис. 7.17). Точки A и B лежат на основаниях цилиндра по разные стороны от данного сечения. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

7.31. Прямоугольник MM_1N_1N – сечение цилиндра, параллельное его оси. На окружностях оснований цилиндра по разные стороны от данного сечения выбраны точки A и B (рис. 7.18). Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Рис. 7.16

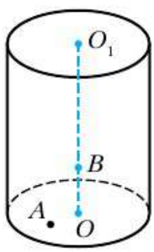


Рис. 7.17

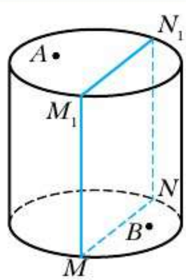
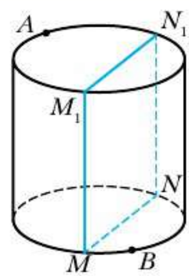


Рис. 7.18



7.32. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу, градусная мера которой равна α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Диагональ образовавшегося сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна S.

7.33. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь образовавшегося сечения равна S.

7.34. Радиус основания цилиндра равен 13 см, а высота – 32 см. Прямоугольник $ABCD$ расположен так, что его вершины A и D лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C – на окружности верхнего основания. Сторона AD в 4 раза меньше стороны AB. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

7.35. Радиус основания цилиндра равен 8 см. Две вершины квадрата со стороной 12 см принадлежат окружности одного основания цилиндра, а две – окружности другого основания. Найдите высоту цилиндра, если плоскость данного квадрата пересекает отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра.

Упражнения для повторения

7.36. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равна h, а угол между его равными сторонами равен α. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

7.37. Основания трапеции равны 6 см и 27 см, а одна из боковых сторон – 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данную трапецию.

7.38. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 6 см, а площадь боковой поверхности – 288 см^2. Найдите бóльшую диагональ призмы.

§ 8. Комбинации цилиндра и призмы

Определение

Призму называют вписанной в цилиндр, если её основания вписаны в основания цилиндра (рис. 8.1)**. При этом цилиндр называют описанным около призмы.**

Докажем, что если призма вписана в цилиндр, то она является прямой. Другими словами, наклонную призму вписать в цилиндр нельзя. Для этого покажем, что боковые рёбра призмы, вписанной в цилиндр, являются образующими цилиндра.

Пусть отрезок AA_1 – боковое ребро призмы, а точки O и O_1 – центры описанных окружностей оснований призмы. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ образом нижнего основания призмы является верхнее основание, а следовательно, образом точки O является точка O_1, т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OO_1}$. Прямая OO_1 – ось цилиндра. Следовательно, отрезок AA_1 перпендикулярен основаниям цилиндра. Поскольку точки A и A_1 принадлежат основаниям цилиндра, то отрезок AA_1 – образующая цилиндра.

Таким образом, *вписать в цилиндр можно такую прямую призму, основания которой являются вписанными многоугольниками*.

Так, правильную призму и прямую треугольную призму можно вписать в цилиндр.

Определение

Призму называют описанной около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра (рис. 8.2)**. При этом цилиндр называют вписанным в призму.**

Боковая грань призмы, описанной около цилиндра, проходит через образующую цилиндра и других общих точек с цилиндром не имеет (на рисунке 8.2 эти образующие выделены красным цветом). В этом случае говорят, что боковая грань призмы **касается цилиндра**.

Рис. 8.1

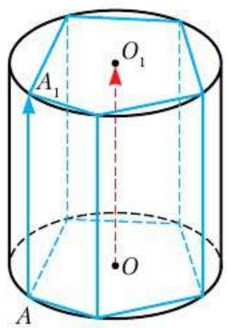
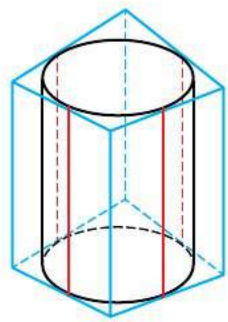


Рис. 8.2



Воспользовавшись ранее изложенной идеей, докажите самостоятельно, что если призма описана около цилиндра, то она является прямой.

Описать около цилиндра можно такую прямую призму, основания которой являются описанными многоугольниками.

Так, правильную призму и прямую треугольную призму можно описать около цилиндра.

Задача. В цилиндр, радиус основания которого равен 13 см, а высота 17 см, вписана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы, четырёхугольник $ABCD$, является трапецией, в которой $BC \parallel AD$ и $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Найдите площадь четырёхугольника AB_1C_1D.

Решение. Четырёхугольник, площадь которого надо найти, изображён на рисунке 8.3. Пусть точки O и O_1 – центры оснований цилиндра. Проведём через точку O высоту MN трапеции $ABCD$ (рис. 8.4). Поскольку трапеция вписана в окружность, то она является равнобокой. Поэтому прямая MN – ось симметрии трапеции, а точки M и N – середины оснований трапеции.

Проведём радиусы OA и OB основания цилиндра (см. рис. 8.4).

Из прямоугольных треугольников AOM и BON найдём отрезки OM и ON.

Имеем: $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см);

$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см). Тогда $MN = 17$ см.

Пусть точка N_1 – середина ребра B_1C_1 (рис. 8.5). Тогда $NN_1 \parallel BB_1$. Поскольку призма прямая, то отрезок NN_1 является высотой призмы, а значит, и высотой цилиндра. По условию $NN_1 = 17$ см. Получили, что в прямоугольном треугольнике MNN_1 равны катеты. Следовательно, $\angle NMN_1 = 45^\circ$.

Рис. 8.3

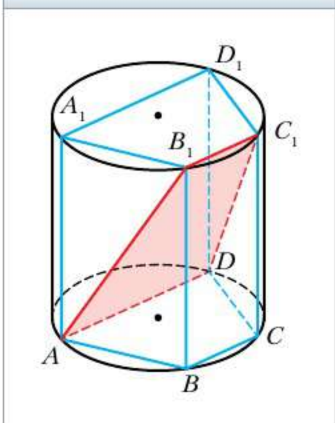


Рис. 8.4

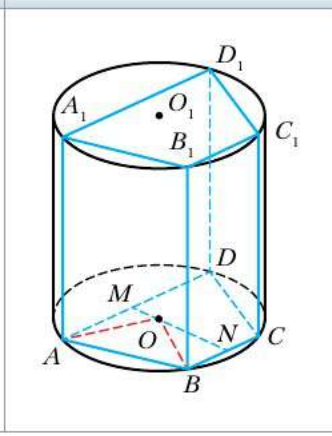
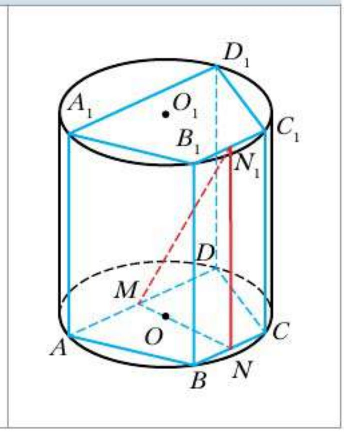


Рис. 8.5



Поскольку $NM \perp AD$ и прямая NM – проекция прямой MN_1 на плоскость основания призмы, то $MN_1 \perp AD$. Следовательно, угол NMN_1 – угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

Воспользовавшись теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника, можно записать: $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$.

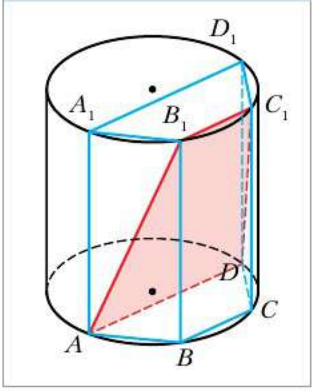
Имеем: $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289$ (см^2).

Тогда $S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2}$ см^2.

Казалось бы, решение завершено. Однако мы рассмотрели только тот случай, когда центры оснований цилиндра принадлежат основаниям призмы. Но центр описанной окружности может и не принадлежать трапеции. Этот случай проиллюстрирован на рисунке 8.6. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $289\sqrt{2}$ см^2 или $221\sqrt{2}$ см^2. ◄

Рис. 8.6



1. Какую призму называют вписанной в цилиндр?
2. Чем для цилиндра являются боковые рёбра призмы, вписанной в цилиндр?
3. Какую призму можно вписать в цилиндр?
4. Какую призму называют описанной около цилиндра?
5. В каком случае говорят, что боковая грань призмы касается цилиндра?
6. Какую призму можно описать около цилиндра?

Упражнения

8.1. Можно ли описать цилиндр около прямой призмы, основанием которой является прямоугольник?

8.2. Можно ли описать цилиндр около прямой призмы, основанием которой является ромб, отличный от квадрата?

8.3. Определите вид треугольника, являющегося основанием призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит вне призмы.

8.4. Определите вид треугольника, являющегося основанием призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит внутри призмы.

8.5. Основанием прямой призмы является четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle A = 36°$, $\angle B = 123°$, $\angle C = 144°$, $\angle D = 57°$. Можно ли описать цилиндр около этой призмы?

8.6. Можно ли вписать цилиндр в прямую призму, основанием которой является ромб?

8.7. Можно ли вписать цилиндр в прямую призму, основанием которой является прямоугольник, отличный от квадрата?

8.8. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна меньшему основанию. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

8.9. Сумма боковых сторон трапеции, являющейся основанием прямой призмы, равна 16 см, а средняя линия трапеции — 7 см. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

8.10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около куба, ребро которого равно a.

8.11. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а его высота — 12 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около данного параллелепипеда.

8.12. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр.

8.13. Высота цилиндра равна 6 см, а диагональ его осевого сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы, вписанной в цилиндр.

8.14. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна a, а диагональ боковой грани образует с боковым ребром призмы угол α. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около данной призмы.

8.15. Высота основания правильной треугольной призмы равна 9 см, а боковое ребро призмы — 4 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около данной призмы.

8.16. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а высота — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

8.17. Ребро куба равно a. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в данный куб.

8.18. В призму, основанием которой является равнобокая трапеция с основаниями 8 см и 18 см, вписан цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если высота призмы равна 10 см.

8.19. В призму, основанием которой является ромб со стороной $10\sqrt{2}$ см и углом 45°, вписан цилиндр. Найдите площадь осевого сечения этого цилиндра, если высота призмы равна 4 см.

8.20. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра, описанного около правильной шестиугольной призмы, к площади боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

8.21. Найдите отношение площади осевого сечения цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, к площади осевого сечения цилиндра, вписанного в эту призму.

8.22. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу основания, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

8.23. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около данной призмы.

8.24. Основанием призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота призмы равна h, а площадь боковой поверхности – S. Найдите радиус основания цилиндра, описанного около данной призмы.

8.25. Основание призмы – равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ грани, проходящей через боковую сторону основания, равна m и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

8.26. Основание призмы – равнобедренный треугольник с углом α между равными сторонами. Диагональ грани, проходящей через основание треугольника, равна d и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

8.27. Площадь боковой поверхности призмы, основанием которой является ромб с углом α, равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

8.28. Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

8.29. В правильную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ вписан цилиндр, касающийся боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C по образующим MM_1 и KK_1 соответственно. Диагональ осевого сечения этого цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь четырёхугольника MM_1K_1K.

8.30. В правильную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан цилиндр, касающийся боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C по образующим EE_1 и FF_1 соответственно. Четырёхугольник EE_1F_1F является квадратом. Найдите площадь этого квадрата, если радиус основания цилиндра равен R.

8.31. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удалён от концов большей боковой стороны на 1 см и 2 см. Найдите площадь трапеции.

8.32. Отрезок CD – высота треугольника ABC, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 15$ см, $CD = 12$ см. Найдите длину окружности, вписанной в треугольник BCD.

8.33. Основанием пирамиды является ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Высота пирамиды, равная 16 см, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§ 9. Конус

Рассмотрим на плоскости α окружность с центром в точке O. Проведём отрезок OK перпендикулярно плоскости α (рис. 9.1). Соединим точку K со всеми точками окружности. Все проведённые отрезки образуют некоторую фигуру F.

Окружность с центром O ограничивает круг. Тело, ограниченное этим кругом и фигурой F, называют **конусом**.

Фигуру F называют **боковой поверхностью конуса**, круг – **основанием конуса**, отрезки, образующие фигуру F, – **образующими конуса**. На рисунке 9.1 отрезки KX и KY – образующие конуса. Все образующие конуса равны и составляют равные углы с плоскостью основания.

Общий конец всех образующих называют **вершиной конуса**. На рисунке 9.1 точка K – вершина конуса.

Прямую, проходящую через вершину конуса и центр его основания, называют **осью конуса**. На рисунке 9.1 прямая KO – ось конуса. Ось конуса перпендикулярна плоскости его основания.

На рисунке 9.1 каждый из отрезков OX и OY является радиусом основания конуса.

Высотой конуса называют отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания. На рисунке 9.1 отрезок KO – высота конуса.

Конус можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет. На рисунке 9.2 изображён конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой AC. При вращении гипотенузы AB образуется боковая поверхность конуса, а при вращении катета CB – основание конуса.

Если конус пересечь плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется равнобедренный треугольник, боковые стороны которо-

Рис. 9.1

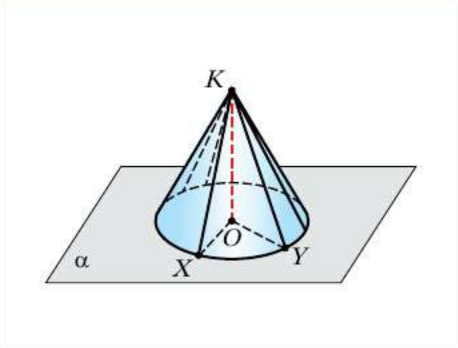


Рис. 9.2

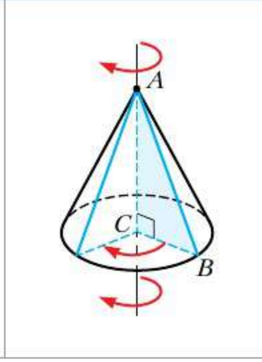
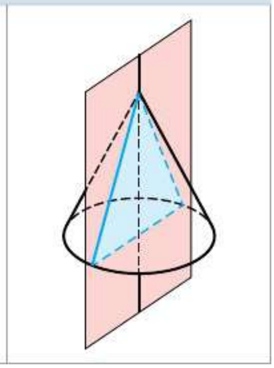


Рис. 9.3



го – образующие конуса, основание – диаметр основания конуса (рис. 9.3). Такое сечение называют **осевым сечением конуса**.

Плоскость, содержащая осевое сечение конуса, является его плоскостью симметрии.

Через любые две образующие KA и KB конуса можно провести плоскость. Рассмотрим треугольник AKB, являющийся сечением конуса этой плоскостью (рис. 9.4). Поскольку $KA = KB$, то сечением конуса плоскостью, проходящей через две его образующие, является равнобедренный треугольник.

Представим себе, что поверхность конуса разрезали по окружности основания и некоторой образующей (рис. 9.5), а затем развернули на плоскость. Полученную фигуру называют **развёрткой конуса на плоскость** или просто **развёрткой конуса** (рис. 9.6). Она состоит из круга, равного основанию конуса, и кругового сектора, который называют **развёрткой боковой поверхности конуса**.

Рис. 9.4

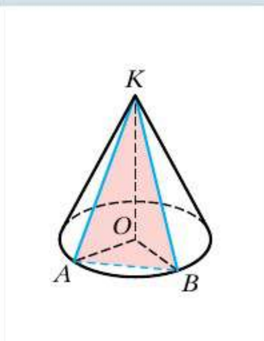


Рис. 9.5

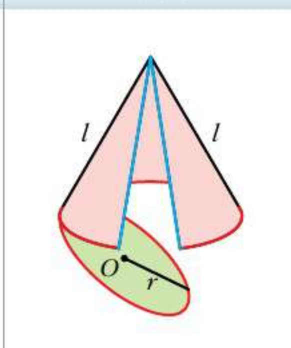
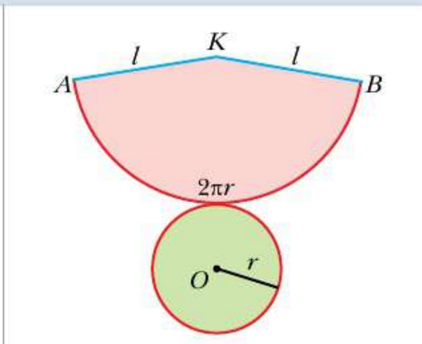


Рис. 9.6



Если образующая конуса равна l, а радиус основания конуса – r, то радиус кругового сектора равен l, а длина дуги сектора – $2\pi r$. Пусть градусная мера угла AKB равна α. Тогда длина дуги AB равна $\frac{\pi l \alpha}{180}$. Имеем: $2\pi r = \frac{\pi l \alpha}{180}$. Отсюда

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (*)$$

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса принимают площадь его развёртки боковой поверхности. Имеем: $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360}$. С учётом равенства $(*)$ получаем: $S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l$.

Итак, **площадь боковой поверхности конуса** вычисляют по формуле

$$\boxed{S_{бок} = \pi r l,}$$

где r – радиус основания конуса, l – длина образующей конуса.

Площадью полной поверхности конуса называют сумму площадей боковой поверхности и основания конуса. Имеем:

$$\boxed{S_{полн} = S_{бок} + S_{осн},}$$

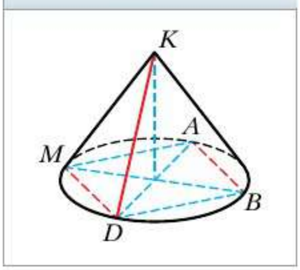
где $S_{полн}$ – площадь полной поверхности конуса, $S_{осн}$ – площадь основания конуса.

Площадь основания конуса равна πr^2. Тогда получаем формулу

$$\boxed{S_{полн} = \pi r l + \pi r^2}$$

Задача. В основании конуса с вершиной K проведены хорда AB и диаметр AD. Найдите угол между образующей KD и хордой AB, если $AB = KD$.

Рис. 9.7



Решение. Проведём диаметр BM основания конуса (рис. 9.7). Диагонали четырёхугольника $ABDM$ точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм. Отсюда $AB = MD$. Поскольку $AB \parallel MD$, то искомый угол равен углу MDK.

Рассмотрим треугольник MKD. Поскольку $AB = KD$ и $AB = MD$, то треугольник MKD равносторонний. Следовательно, искомый угол равен 60°.

Ответ: 60°. ◄

1. Какое тело называют конусом?
2. Опишите, что называют боковой поверхностью конуса.
3. Что называют основанием конуса? Осью конуса? Высотой конуса?
4. Что называют осевым сечением конуса?
5. Из чего состоит развёртка конуса?
6. Что принимают за площадь боковой поверхности конуса?
7. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности конуса?
8. По какой формуле вычисляют площадь полной поверхности конуса?

Упражнения

9.1. Высота конуса равна 4 см, а его образующая – 6 см. Найдите радиус основания конуса.

9.2. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая – 13 см. Найдите высоту конуса.

9.3. Найдите высоту и радиус основания конуса, если его образующая равна 18 см, а осевое сечение конуса – правильный треугольник.

9.4. Радиус основания конуса равен 2 см, а его осевое сечение – равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите высоту конуса и его образующую.

9.5. Радиус основания конуса равен 9 см, а угол между образующей и плоскостью основания равен 30°. Найдите площадь: 1) боковой поверхности конуса; 2) осевого сечения конуса.

9.6. Радиус основания конуса равен 6 см, а высота – 8 см. Найдите площадь: 1) боковой поверхности конуса; 2) полной поверхности конуса.

9.7. Высота конуса равна H, а угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Найдите площадь: 1) осевого сечения конуса; 2) боковой поверхности конуса.

9.8. Образующая конуса равна a, а угол в его осевом сечении при вершине конуса равен α. Найдите площадь: 1) осевого сечения конуса; 2) боковой поверхности конуса.

9.9. Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 8 см, а один из углов равен 30°, вращается вокруг большего катета. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося конуса.

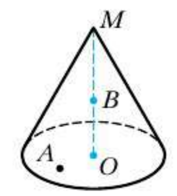
9.10. Найдите площадь осевого сечения конуса, образовавшегося в результате вращения прямоугольного треугольника с гипотенузой 17 см и катетом 15 см вокруг другого катета.

9.11. Радиус основания конуса равен 15 см, а расстояние от центра основания до образующей конуса – 12 см. Найдите образующую и высоту конуса.

9.12. Высота конуса равна $4\sqrt{5}$ см, а расстояние от центра основания до середины образующей конуса – 6 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.13. Точка M – вершина конуса, точка O – центр его основания, точка A принадлежит основанию конуса, точка B принадлежит отрезку MO (рис. 9.8). Постройте точку пересечения прямой AB с боковой поверхностью конуса.

Рис. 9.8



9.14. В основании конуса проведена хорда длиной a, стягивающая дугу, градусная мера которой равна α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен β. Найдите высоту конуса.

9.15. В основании конуса проведена хорда, стягивающая дугу, градусная мера которой равна α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Угол между высотой конуса и его образующей равен β, а длина образующей равна m. Найдите данную хорду.

9.16. Через две образующие конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу, градусная мера которой равна β ($0^\circ < \beta < 180^\circ$). Найдите площадь образовавшегося сечения, если высота конуса равна H, а угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса равен α.

9.17. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 60°, проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде длиной 8 см, стягивающей дугу, градусная мера которой равна 90°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

9.18. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг прямой, содержащей его гипотенузу. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.19. Равнобедренный остроугольный треугольник с основанием a и углом α при основании вращается вокруг прямой, содержащей его боковую сторону. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.20. Равнобедренный треугольник с основанием a и противолежащим ему углом α вращается вокруг прямой, содержащей его основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.21. Прямоугольная трапеция с основаниями 6 см и 9 см и высотой 4 см вращается вокруг прямой, содержащей её большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.22. Прямоугольная трапеция с основаниями 3 см и 4 см и острым углом 45° вращается вокруг прямой, содержащей её меньшее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.23. Ромб со стороной 10 см и углом 60° вращается вокруг прямой, содержащей одну из сторон ромба. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.24. Основания равнобокой трапеции равны 10 см и 26 см, а боковая сторона равна меньшему основанию. Трапеция вращается вокруг прямой, содержащей большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.25. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор, радиус которого равен 12 см, а градусная мера дуги – 240°. Найдите радиус основания конуса.

9.26. Развёрткой боковой поверхности конуса является полукруг. Какова величина угла при вершине осевого сечения конуса?

9.27. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор, радиус которого равен 5 см. Найдите центральный угол этого сектора, если высота конуса равна 4 см.

9.28. Через две образующие конуса проведена плоскость, образующая с плоскостью основания конуса угол α. Расстояние от центра основания конуса до этой плоскости равно a, а угол между образующей конуса и плоскостью основания равен β. Найдите радиус основания конуса.

9.29. Отрезок MO – высота конуса, отрезки MA и MB – его образующие, $MO = 4\sqrt{2}$ см. Расстояние от точки O до прямой AB равно 2 см. Найдите расстояние от точки O до плоскости AMB.

9.30. Через две образующие конуса проведено сечение, угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса равен α. Угол между образующей и плоскостью основания равен β, а радиус основания конуса равен R. Найдите площадь этого сечения.

9.31. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение. Угол между плоскостью этого сечения и плоскостью основания конуса равен β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна H.

9.32. Отрезки MA, MB и MC – образующие конуса, причём $MA \perp MB$, $MB \perp MC$, $MA \perp MC$, $MA = 3$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

9.33. Отрезок MK – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, $AB = 15$ см, $AC = 14$ см, $BC = 13$ см. Треугольник ABC вращается вокруг прямой MK. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.34. Отрезок EF – средняя линия трапеции $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Данная трапеция вращается вокруг прямой EF. Найдите площадь поверхности тела вращения.

9.35. Отрезки AD и CE — медианы треугольника ABC. Найдите сторону AC, если $AB = 8\sqrt{5}$ см, $BC = 6\sqrt{5}$ см и $AD \perp CE$.

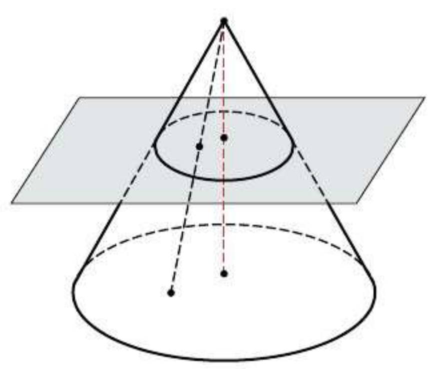
9.36. Площадь равнобокой трапеции равна $32\sqrt{3}$ см^2, а острый угол — $60°$. Найдите боковую сторону трапеции, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

9.37. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом $30°$ при основании и боковой стороной 12 см. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол $60°$. Найдите высоту пирамиды.

§ 10. Усечённый конус

Пересечём конус плоскостью, параллельной плоскости основания. В силу ключевой задачи 4.25 фигура, полученная в сечении, — это образ основания конуса при гомотетии с центром в вершине конуса. Поэтому сечением конуса плоскостью, параллельной основанию (или перпендикулярной оси конуса), является круг.

Рис. 10.1



Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, делит конус на два тела. Одно из них является конусом, другое называют **усечённым конусом** (рис. 10.1).

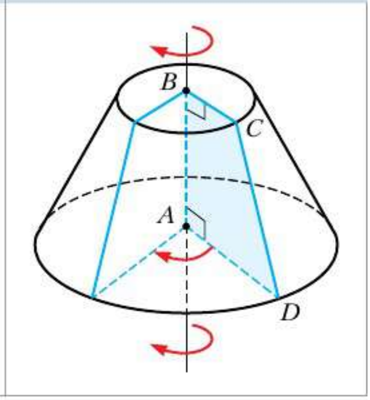
Основание данного конуса, из которого образован усечённый конус, и круг, получившийся в сечении, называют **основаниями усечённого конуса**. Часть боковой поверхности данного конуса и часть его образующей, заключённые между основаниями усечённого конуса, называют соответственно **боковой поверхностью** и **образующей усечённого конуса** (рис. 10.2). Прямую, проходящую через центры O и O_1 оснований, называют **осью усечённого конуса**.

Высотой усечённого конуса называют перпендикуляр, проведённый из любой точки плоскости одного основания на плоскость другого основания. На рисунке 10.2 отрезок OO_1 является высотой усечённого конуса.

Усечённый конус можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг прямой, содержащей мень-

Рис. 10.2

Рис. 10.3



шую боковую сторону. На рисунке 10.3 изображён усечённый конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг прямой AB. При вращении боковой стороны CD трапеции образуется боковая поверхность усечённого конуса, а при вращении оснований AD и BC трапеции – основания усечённого конуса.

Если пересечь усечённый конус плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется равнобокая трапеция, боковые стороны которой – образующие усечённого конуса, основания – диаметры оснований усечённого конуса (рис. 10.4). Такое сечение называют **осевым сечением усечённого конуса**.

Плоскость, содержащая осевое сечение усечённого конуса, является его плоскостью симметрии.

Любые две образующие AA_1 и BB_1 усечённого конуса принадлежат пересекающимся прямым AK и BK (рис. 10.5). Следовательно, через прямые AA_1 и BB_1 можно провести плоскость. Рассмотрим четырёхугольник AA_1B_1B, являющийся сечением усечённого конуса этой плоскостью. Имеем: $AA_1 = BB_1$ и $A_1B_1 \parallel AB$. Таким образом, сечением усечён-

Рис. 10.4

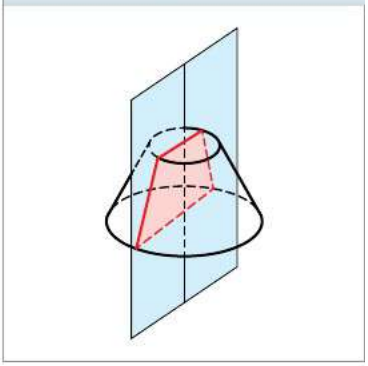
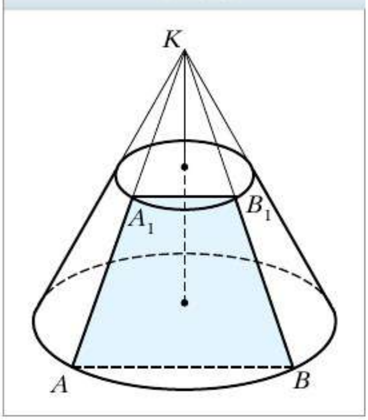


Рис. 10.5



ного конуса плоскостью, проходящей через две его образующие, является равнобокая трапеция.

Представим себе, что поверхность усечённого конуса разрезали по окружностям оснований и некоторой образующей (рис. 10.6), а затем развернули на плоскости. Полученную фигуру называют **развёрткой усечённого конуса на плоскость** или просто **развёрткой усечённого конуса** (рис. 10.7). Она состоит из двух кругов, равных основаниям усечённого конуса, и части кольца, образованного двумя концентрическими окружностями. Эту часть кольца называют **развёрткой боковой поверхности усечённого конуса**.

За площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности усечённого конуса принимают площадь его развёртки боковой поверхности.

На рисунке 10.8 изображены: конус с вершиной в точке K, образующей KA и основанием с центром в точке O и радиусом r («большой» конус); конус с вершиной в точке K, образующей KA_1 и основанием с центром в точке O_1 и радиусом r_1 («малый» конус); усечённый конус с образующей AA_1 и основаниями с центрами в точках O и O_1.

Рис. 10.6

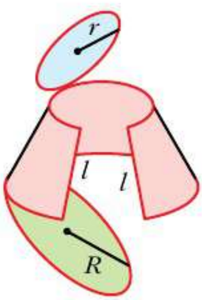


Рис. 10.7

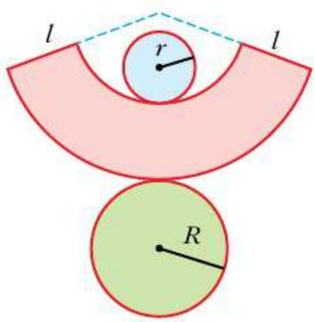
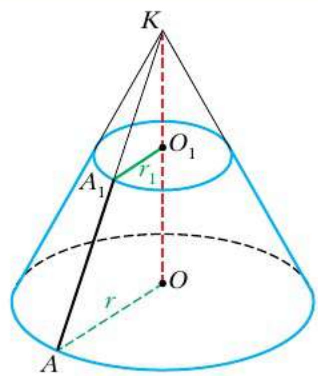


Рис. 10.8



Понятно, что площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности усечённого конуса равна разности площадей боковых поверхностей «большого» и «малого» конусов. Имеем:

$$S_{\text{бок}} = \pi r \cdot KA - \pi r_1 \cdot KA_1 = \pi r(KA_1 + AA_1) - \pi r_1 KA_1 = \pi r \cdot AA_1 + \\ + \pi(r - r_1)KA_1.$$

Поскольку прямоугольные треугольники AOK и A_1O_1K имеют общий угол AKO, то эти треугольники подобны. Отсюда

$$\frac{KA}{KA_1} = \frac{OA}{OA_1}, \text{ т. е. } \frac{KA}{KA_1} = \frac{r}{r_1}. \text{ Имеем:}$$

$$\frac{KA}{KA_1} - 1 = \frac{r}{r_1} - 1;\ \frac{KA - KA_1}{KA_1} = \frac{r - r_1}{r_1};\ \frac{AA_1}{KA_1} = \frac{r - r_1}{r_1};\ KA_1 = \frac{r_1 \cdot AA_1}{r - r_1}.$$

Тогда $S_{\text{бок}} = \pi r \cdot AA_1 + \pi\ (r - r_1) \cdot \frac{r_1 \cdot AA_1}{r - r_1} = \pi r \cdot AA_1 + \pi r_1 \cdot AA_1 = \pi\,(r + r_1) \cdot AA_1$.

Итак, площадь боковой поверхности усечённого конуса вычисляют по формуле

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l,}$$

где r и r_1 – радиусы оснований, l – длина образующей усечённого конуса.

1. Что называют боковой поверхностью усечённого конуса?
2. Что называют осевым сечением усечённого конуса?
3. Что принимают за площадь боковой поверхности усечённого конуса?
4. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности усечённого конуса?

Упражнения

10.1. Точка M – вершина конуса, точка O – центр его основания. Радиус основания конуса равен 18 см. На отрезке MO отмечена точка K так, что $MK : KO = 4 : 5$. Через точку K проведена плоскость, параллельная основанию конуса. Найдите площадь образовавшегося сечения конуса.

10.2. Площадь сечения конуса плоскостью, перпендикулярной его высоте, равна 12π см^2. В каком отношении плоскость сечения делит высоту конуса, считая от его вершины, если радиус основания равен $3\sqrt{3}$ см?

10.3. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 1 см и 2 см, а образующая – 5 см.

10.4. Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 4 см и 6 см, а образующая – 3 см.

10.5. Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 см и 8 см, а образующая – 13 см. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.6. Радиусы оснований усечённого конуса равны 4 см и 12 см, а высота – 15 см. Найдите образующую усечённого конуса.

10.7. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $\angle D = 45°$, $AD = 7$ см, $CD = 2\sqrt{2}$ см. Трапеция вращается вокруг прямой AB. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося усечённого конуса.

10.8. Дана трапеция $ABCD$ такая, что $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 2$ см, $\angle D = 60^\circ$. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, полученного в результате вращения данной трапеции вокруг прямой AB.

10.9. Высоту конуса разделили на 4 равных отрезка и через точки деления провели плоскости, параллельные основанию конуса. Найдите площадь наибольшего из образовавшихся сечений конуса, если площадь его основания равна S.

10.10. Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины конуса следует провести плоскость, перпендикулярную высоте конуса, чтобы площадь образовавшегося сечения конуса была в 3 раза меньше площади его основания?

10.11. Площади оснований усечённого конуса равны 4 см^2 и 16 см^2. Через середину высоты усечённого конуса проведена плоскость, параллельная его основаниям. Найдите площадь образовавшегося сечения усечённого конуса.

10.12. Точка O – центр большего основания усечённого конуса, точка O_1 – центр его меньшего основания, точка O_2 – середина отрезка OO_1. Площадь большего основания равна 4π см^2, а меньшего – π см^2. Через точку O_2 проведена плоскость, перпендикулярная прямой OO_1. Найдите отношение площади боковой поверхности усечённого конуса с высотой O_1O_2 к площади боковой поверхности усечённого конуса с высотой O_2O.

10.13. Радиус большего основания усечённого конуса равен R, радиус меньшего основания – r, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен α. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.14. Радиусы оснований усечённого конуса равны 5 см и 15 см, а диагональ осевого сечения – $4\sqrt{61}$ см. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.15. В усечённом конусе проведено осевое сечение CC_1D_1D и по разные стороны от него на основаниях конуса выбраны точки A и B (рис. 10.9). Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью CC_1D_1.

10.16. В усечённом конусе проведено осевое сечение MM_1N_1N и по разные стороны от него на окружностях оснований выбраны точки A и B (рис. 10.10). Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Рис. 10.9

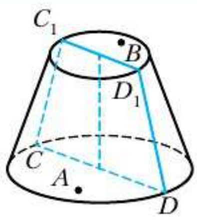
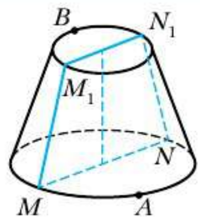


Рис. 10.10



10.17. Высота усечённого конуса равна 6 см, а угол между его образующей и плоскостью большего основания составляет 60°. Диагонали осевого сечения усечённого конуса перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.18. Образующая усечённого конуса равна m и составляет с плоскостью большего основания угол α, а диагональ осевого сечения перпендикулярна образующей. Найдите радиусы оснований усечённого конуса.

10.19. Угол между образующей усечённого конуса и плоскостью большего основания равен α, а угол между диагональю осевого сечения и этой плоскостью равен β. Найдите радиусы оснований усечённого конуса, если его высота равна h.

10.20. Через две образующие усечённого конуса, угол между которыми равен 90°, проведена плоскость, пересекающая большее основание по хорде длиной a, а меньшее – по хорде длиной b, и отсекающая от окружности каждого основания дугу, градусная мера которой 120°. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.21. Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, $R > r$. Через две образующие проведена плоскость, пересекающая основания усечённого конуса по хордам, стягивающим дуги α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), и образующая с плоскостью основания угол β. Найдите площадь образовавшегося сечения усечённого конуса.

10.22. Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину острого угла ромба перпендикулярно к его стороне. Найдите площадь поверхности тела вращения.

10.23. Равнобедренный остроугольный треугольник с основанием a и противолежащим ему углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину данного угла перпендикулярно боковой стороне треугольника. Найдите площадь поверхности тела вращения.

10.24. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а угол между его боковыми сторонами равен α. Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла при его основании перпендикулярно основанию. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Упражнения для повторения

10.25. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник со сторонами 4 см, 13 см и 15 см.

10.26. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины его меньшего угла.

10.27. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом 120°. Угол между диагоналями равных боковых граней, проведёнными из одной вершины верхнего основания, равен 90°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

§ 11. Комбинации конуса и пирамиды

Определение

Пирамиду называют вписанной в конус, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.1)**. При этом конус называют описанным около пирамиды.**

Рис. 11.1

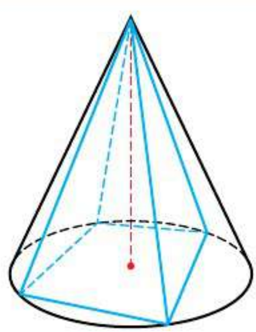
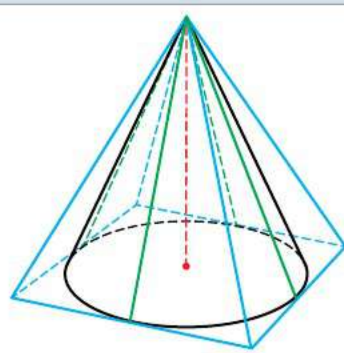


Рис. 11.2



Рёбра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса, а высоты пирамиды и конуса совпадают.

Пирамиду можно вписать в конус, если около основания этой пирамиды можно описать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания.

Определение

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.2)**. При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Боковая грань пирамиды, описанной около конуса, проходит через образующую конуса и других общих точек с конусом не имеет (на рисунке 11.2 эти образующие выделены зелёным цветом). В этом случае говорят, что боковая грань пирамиды **касается** конуса.

Высота пирамиды, описанной около конуса, и высота конуса совпадают.

Пирамиду можно описать около конуса, если в основание этой пирамиды можно вписать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания.

На рисунке 11.3 изображена пирамида, вписанная в конус, которую пересекли плоскостью, параллельной основанию. В результате образовались две комбинации тел: пирамида, вписанная в конус, и **усечённая пирамида, вписанная в усечённый конус**. При этом усечённый конус называют **описанным около усечённой пирамиды**.

Основания усечённой пирамиды, вписанной в усечённый конус, вписаны в основания усечённого конуса. Боковые рёбра усечённой пирамиды являются образующими усечённого конуса.

На рисунке 11.4 изображена пирамида, описанная около конуса, которую пересекли плоскостью, параллельной основанию. В результате образовались две комбинации тел: пирамида, описанная около конуса, и **усечённая пирамида, описанная около усечённого конуса**. При этом усечённый конус называют **вписанным в усечённую пирамиду**.

Рис. 11.3

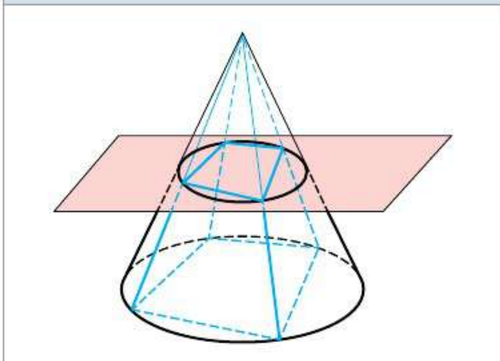
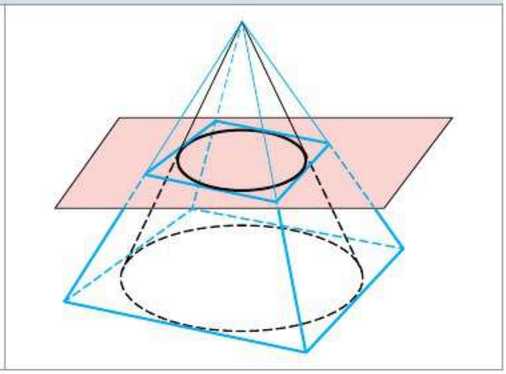


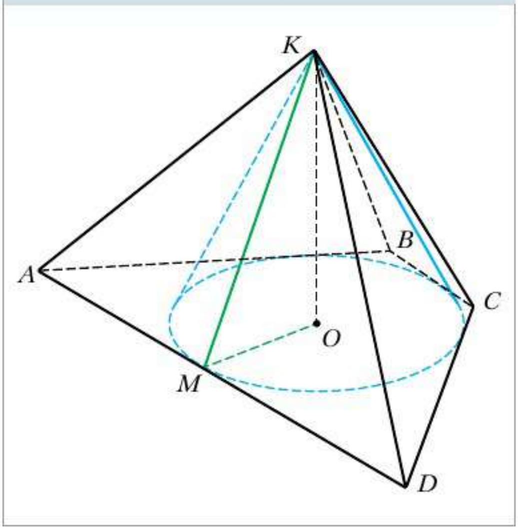
Рис. 11.4



Основания усечённой пирамиды, описанной около усечённого конуса, описаны около оснований усечённого конуса. Боковые грани этой усечённой пирамиды проходят через образующие усечённого конуса и других общих точек с усечённым конусом не имеют.

Задача. Конус, радиус основания которого равен 3 см, а образующая 5 см, вписан в четырёхугольную пирамиду $KABCD$. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), боковая сторона которой равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Рис. 11.5



Решение. Вершина данной пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания. Как вы знаете из курса геометрии 10 класса, в такой пирамиде двугранные углы при рёбрах основания равны. Проведём радиус OM в точку касания ребра AD с основанием конуса, соединим точки M и K (рис. 11.5). Поскольку $OM \perp AD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $KM \perp AD$. Следовательно, угол KMO – линейный угол двугранного угла при ребре AD. Пусть $\angle KMO = \alpha$. Имеем: $\cos\alpha = \dfrac{OM}{KM} = \dfrac{3}{5}$.

В силу ключевой задачи 1 § 18 («Геометрия. 10 класс») можно записать $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$. Найдём площадь основания пирамиды, т. е. площадь трапеции $ABCD$.

Высота данной трапеции равна диаметру вписанной окружности, т. е. 6 см. Поскольку в данную трапецию можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + DC = 2AB = 20$ см. Имеем: $S_{\text{осн}} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot 2OM = 60$ (см^2).

Таким образом, $S_{\text{бок}} = \dfrac{60}{\cos\alpha} = 100$ (см^2).
Ответ: 100 см^2. ◄

1. Какую пирамиду называют вписанной в конус?
2. Чем для конуса являются боковые рёбра пирамиды, вписанной в конус?

3. Какую пирамиду можно вписать в конус?
4. Какую пирамиду называют описанной около конуса?
5. В каком случае говорят, что боковая грань пирамиды касается конуса?
6. Какую пирамиду можно описать около конуса?
7. Опишите, что называют усечённой пирамидой, вписанной в усечённый конус.
8. Чем для усечённого конуса являются боковые рёбра усечённой пирамиды, вписанной в усечённый конус?
9. Опишите, что называют усечённой пирамидой, описанной около усечённого конуса.

Упражнения

11.1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро – 8 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около данной пирамиды.

11.2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см, а высота – 5 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около данной пирамиды.

11.3. Основанием пирамиды является треугольник со стороной a и противолежащим ей углом α, а угол между каждым боковым ребром и плоскостью основания равен β. Найдите высоту и образующую конуса, описанного около данной пирамиды.

11.4. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, а высота пирамиды равна 12 см. Вершина пирамиды проектируется в середину гипотенузы. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

11.5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами $4\sqrt{7}$ см и 12 см, а боковые рёбра пирамиды равны по 17 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около данной пирамиды.

11.6. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а высота – 6 см. Найдите образующую конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 18 см, а апофема – 9 см. Найдите высоту конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.9. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.10. Около конуса описана правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

11.11. Около конуса описана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

11.12. Основание пирамиды – прямоугольник, меньшая из сторон которого равна a, а угол между диагоналями равен α. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

11.13. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетом b и прилежащим к нему острым углом α. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

11.14. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием a и прилежащим к нему углом α. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

11.15. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см, а высота пирамиды равна $\frac{5\sqrt{87}}{8}$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

11.16. Докажите, что если в пирамиду $MABCD$ можно вписать конус, то сумма площадей граней AMB и CMD равна сумме площадей граней AMD и BMC.

11.17. Двугранный угол правильной треугольной пирамиды при ребре основания равен α, а расстояние от центра основания до боковой грани равно m. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.18. Двугранный угол правильной четырёхугольной пирамиды при ребре основания равен β, а расстояние от центра основания до боковой грани равно d. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.19. Около конуса описана пирамида, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, а все двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите площадь осевого сечения данного конуса.

11.20. Около конуса описана пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании. Все двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите площадь боковой поверхности данного конуса.

11.21. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.22. Около конуса описана пирамида, основанием которой является треугольник со сторонами 6 см, 25 см и 29 см, а высота пирамиды равна $4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности данного конуса.

11.23. В усечённый конус вписана правильная усечённая треугольная пирамида. Радиусы оснований усечённого конуса равны 6 см и 18 см, а высота – 9 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

11.24. Около правильной усечённой четырёхугольной пирамиды описан усечённый конус. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если стороны оснований усечённой пирамиды равны 8 см и 12 см, а её высота – $2\sqrt{7}$ см.

11.25. В правильную усечённую четырёхугольную пирамиду вписан усечённый конус, радиусы оснований которого равны 5 см и 7 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

11.26. Около усечённого конуса описана правильная усечённая треугольная пирамида, стороны оснований которой равны 18 см и 24 см, а боковое ребро – 6 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

Упражнения для повторения

11.27. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отметили точку M так, что $AM = 13$ см. Найдите площадь четырёхугольника $AMCD$, если $AB = 12$ см, $BD = 20$ см.

11.28. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на её диаметр, делит его на два отрезка, один из которых на 27 см больше другого. Найдите длину данной окружности, если длина перпендикуляра равна 18 см.

11.29. Даны точки A $(-6; 5; 2)$, B $(2; 3; 4)$ и M $(4; -1; 2)$. Найдите расстояние от точки M до середины отрезка AB.

§ 12. Сфера и шар. Уравнение сферы

Определение

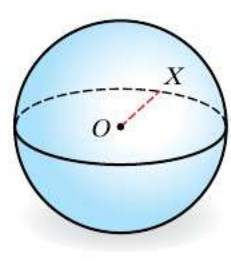
Сферой называют геометрическое место точек пространства, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу (рис. 12.1)**.**

Заданную точку называют **центром сферы**. На рисунке 12.1 точка O – центр сферы.

Любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром, называют **радиусом сферы**. Длину этого отрезка также принято называть радиусом сферы. На рисунке 12.1 отрезок OX – радиус. Из определения следует, что все радиусы сферы равны.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называют **диаметром сферы**. Если радиус сферы равен r, то диаметр равен $2r$.

Рис. 12.1



Из курса математики 6 класса вы знаете, что сфера ограничивает тело, которое называют **шаром**.

Определение

Шаром называют геометрическое место точек пространства, расстояния от которых до заданной точки не более данного положительного числа.

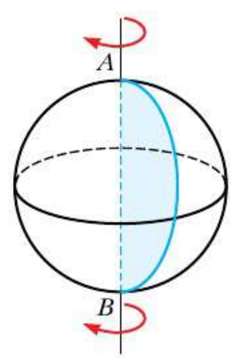
Заданную точку называют **центром шара**. Сферу, ограничивающую шар, называют **поверхностью шара**. **Радиусом шара** называют радиус его поверхности.

Диаметр шара – это диаметр поверхности шара.

Если X – произвольная точка шара радиусом r с центром в точке O, то $OX \leqslant r$.

Шар можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения полукруга вокруг прямой, содержащей его диаметр. На рисунке 12.2 изображён шар, полученный вращением полукруга вокруг прямой, содержащей его диаметр AB. При вращении полуокружности AB образуется сфера – поверхность полученного шара.

Рис. 12.2



Теорема 12.1

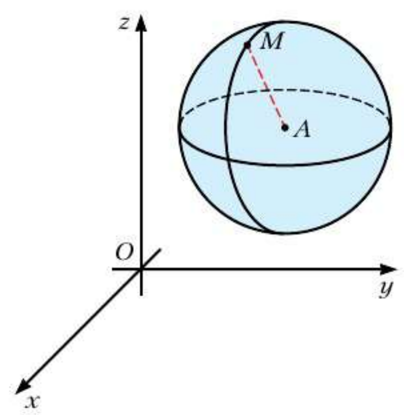
Уравнение сферы с центром в точке A (a; b; c) и радиусом r имеет вид:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

Доказательство

Покажем, что координаты каждой точки данной сферы удовлетворяют данному уравнению, и наоборот, каждая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, принадлежит данной сфере.

Рис. 12.3



Пусть M (x; y; z) – произвольная точка сферы радиусом r с центром в точке A (a; b; c) (рис. 12.3). Тогда $AM = r$, или

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r.$$

Отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \quad (*)$$

Мы показали, что координаты (x; y; z) произвольной точки M сферы являются решением уравнения (∗).

Пусть (x_0; y_0; z_0) – произвольное решение уравнения (∗). Имеем:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=r^2.$$

Поскольку r – радиус сферы, то $r > 0$. Отсюда получаем: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$. Это равенство означает, что точка N (x_0; y_0; z_0) удалена от точки A (a; b; c) на расстояние, равное радиусу сферы. Следовательно, точка N принадлежит сфере.

Итак, мы показали, что уравнение (∗) является уравнением сферы. ◄

Заметим, что уравнение сферы радиусом r с центром в начале координат имеет вид: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

1. Что называют сферой?
2. Что называют радиусом сферы; диаметром сферы?
3. Чему равен диаметр сферы, если её радиус равен r?
4. Что называют шаром?
5. Что называют диаметром шара?

6. Какое уравнение является уравнением сферы с центром в точке A (a; b; с) и радиусом r?

Упражнения

12.1. Приведите примеры предметов из окружающей обстановки, повседневной жизни, имеющих форму сферы (шара).

12.2. Точки A и B лежат на сфере радиусом 5 см с центром O. Найдите отрезок AB, если треугольник AOB является правильным.

12.3. Точки C и D лежат на сфере с центром O, диаметр которой равен 8 см. Найдите отрезок CD, если треугольник COD является прямоугольным.

12.4. Отрезок AB – диаметр сферы, M – произвольная точка сферы. Докажите, что $\angle AMB = 90°$.

12.5. Докажите, что центр сферы является её центром симметрии.

12.6. На сфере с центром O взяли точки A и B такие, что $AB = 18$ см. Найдите радиус сферы, если расстояние от точки O до прямой AB равно 12 см.

12.7. Какой фигурой является геометрическое место точек пространства, удалённых от данной точки на расстояние, не большее 7 см?

12.8. Радиус шара равен $\sqrt{5}$ см. Принадлежит ли шару точка A, если она удалена от центра шара: 1) на 2 см; 2) на 2,3 см?

12.9. Радиус шара равен $4\frac{2}{7}$ см. Принадлежит ли шару точка B, если она удалена от центра шара: 1) на 5 см; 2) на $\sqrt{15}$ см?

12.10. Определите по уравнению сферы координаты её центра и радиус:
1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$; 3) $(x+3)^2+(y-4)^2+z^2=11$;
2) $x^2+(y+5)^2+(z-6)^2=25$; 4) $x^2+y^2+z^2=5$.

12.11. Определите по уравнению сферы координаты её центра и радиус:
1) $(x+6)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=16$; 2) $(x-9)^2+y^2+(z+8)^2=7$.

12.12. Как расположена точка по отношению к сфере $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=$ $=100$:
1) A $(-6; 9; -4\sqrt{3})$; 2) B $(5; 8; -5)$; 3) C $(-10; -4; 1)$?

12.13. Составьте уравнение сферы, если известны координаты её центра K и радиус r:
1) K $(2; 5; -12)$, $r=2$; 3) K $(0; 5; 11)$, $r=2\sqrt{5}$.
2) K $(-4; 0; 7)$, $r=1$;

12.14. Составьте уравнение сферы, если известны координаты её центра K и радиус r:
1) M $(-3; 1; -8)$, $r=9$; 2) M $(9; -10; 0)$, $r=4\sqrt{2}$.

12.15. Составьте уравнение сферы с центром в точке P (3; –1; 16), которая проходит через точку M (–2; –4; 13).

12.16. Составьте уравнение сферы, диаметром которой является отрезок CD, если C (–3; 6; 5), D (1; –4; –5).

12.17. Найдите координаты точек пересечения сферы $(x-2)^2+(y+3)^2+$ $+(z-6)^2=49$ с осями координат.

12.18. Сфера с центром в точке A (–1; 3; 2) пересекается с осью ординат в точках B (0; –1; 0) и C. Найдите координаты точки C.

12.19. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку M (–6; 2; –3), центр сферы принадлежит оси абсцисс, а радиус сферы равен 7.

12.20. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку N (–1; 2; –2), центр сферы принадлежит оси аппликат, а радиус сферы равен 3.

12.21. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2-10x+14y+2z+70=0$ является уравнением сферы, укажите координаты центра и радиус этой сферы.

12.22. Найдите координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-16y+6z=0$.

12.23. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точки A (1; –1; 2) и B ($\sqrt{17}$; 1; 6), центр сферы принадлежит координатной плоскости yz, а радиус сферы равен $\sqrt{46}$.

12.24. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку C (4; $-2\sqrt{10}$; –2) и начало координат, центр сферы принадлежит координатной плоскости xz, а радиус сферы равен $3\sqrt{10}$.

12.25. Даны точки A (0; –3; 0) и B (0; 6; 0). Составьте уравнение геометрического места точек пространства, расстояние от которых до точки A в 2 раза больше расстояния до точки B. Какой геометрической фигурой является это ГМТ?

12.26. Даны точки A (2; 1; –2) и B (6; 5; 2). Составьте уравнение геометрического места точек пространства, расстояние от которых до точки A в 3 раза меньше расстояния до точки B.

Упражнения для повторения

12.27. Две окружности, радиусы которых равны 9 см и 3 см, касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей внешней касательной.

12.28. Найдите длину окружности, описанной около равнобокой трапеции с основаниями 6 см и 8 см и высотой 7 см.

12.29. В правильной четырёхугольной пирамиде тангенс угла между апофемами двух несоседних боковых граней равен $2\sqrt{2}$. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

§ 13. Взаимное расположение сферы и плоскости

В курсе планиметрии вы исследовали взаимное расположение окружности и прямой и выяснили, что оно зависит от двух параметров: радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой. Пространственным аналогом этой задачи является исследование взаимного расположения сферы и плоскости.

Пусть радиус данной сферы равен r, а расстояние от центра O сферы до данной плоскости α равно d.

I случай. Пусть $d > r$. В этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 13.1).

II случай. Пусть $d < r$. Докажем, что в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность.

Рассмотрим случай, когда секущая плоскость не проходит через центр сферы, т. е. $d \neq 0$. Из центра сферы опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость α. Пусть A – произвольная общая точка сферы и плоскости α (рис. 13.2). Из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = r$, получаем: $O_1A = \sqrt{r^2 - d^2}$. Следовательно, все общие точки сферы и плоскости α принадлежат окружности радиусом $\sqrt{r^2 - d^2}$ с центром в точке O_1. Осталось показать, что любая точка этой окружности является общей точкой сферы и плоскости α.

Рис. 13.1

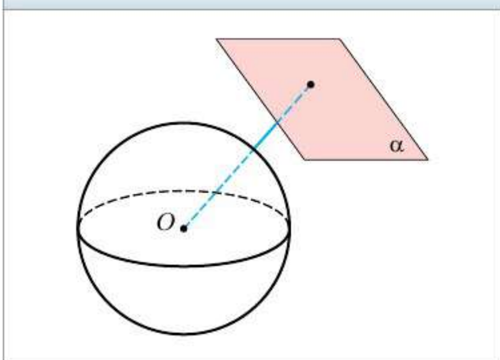
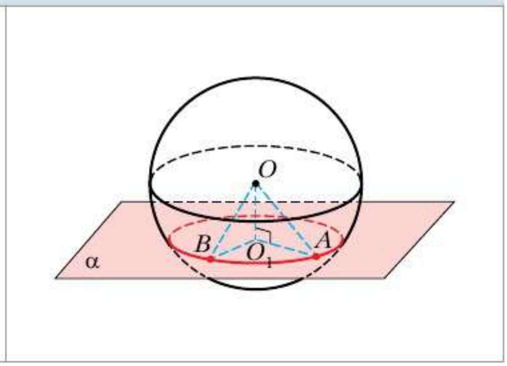


Рис. 13.2



Пусть B – произвольная точка этой окружности. Тогда $O_1B = \sqrt{r^2 - d^2}$. Поскольку точка B принадлежит плоскости α, то из прямоугольного треугольника OO_1B получаем: $OB = \sqrt{O_1B^2 + OO_1^2}$, т. е. $OB = \sqrt{(\sqrt{r^2 - d^2})^2 + d^2} =$ $= \sqrt{r^2} = r$. Следовательно, точка B принадлежит сфере.

Пусть секущая плоскость проходит через центр сферы, т. е. $d = 0$. Тогда в сечении получается фигура, состоящая из тех и только тех точек плоскости α, которые удалены от точки O на расстояние r. Такой фигурой является окружность радиусом r с центром в точке O. Эту окружность называют **большой окружностью сферы** (рис. 13.3).

Итак, *если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечением сферы плоскостью является окружность.*

Опираясь на это утверждение, можно сделать такой вывод: если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то *сечением шара плоскостью является круг.*

Если плоскость проходит через центр шара, то круг, образовавшийся в сечении, называют **большим кругом шара**.

Плоскость, проходящая через центр шара, является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

III случай. Пусть $d = r$. В этом случае сфера и плоскость имеют только одну общую точку (рис. 13.4).

Определение

Плоскость, имеющую со сферой только одну общую точку, называют касательной плоскостью к сфере.

Эту общую точку называют **точкой касания**. На рисунке 13.4 точка A – точка касания.

Рис. 13.3

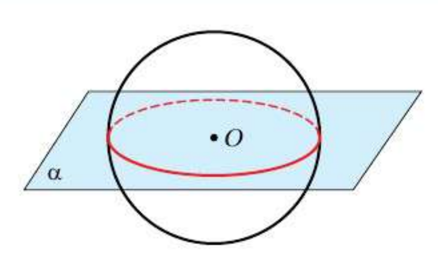
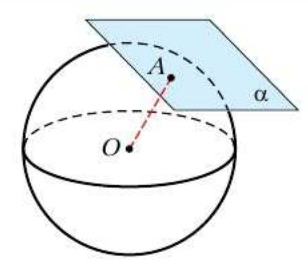


Рис. 13.4



Если фигура принадлежит касательной плоскости и имеет со сферой (с поверхностью шара) общую точку, то говорят, что эта фигура **касается** сферы.

Если такой фигурой является прямая, то говорят, что такая прямая является **касательной** к сфере. Например, прямые a, b и c на рисунке 13.5 являются касательными к сфере в точке A.

Рис. 13.5

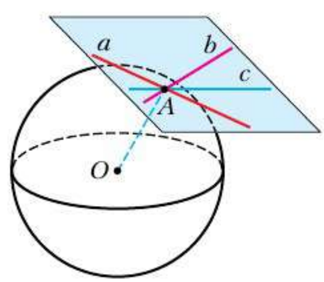
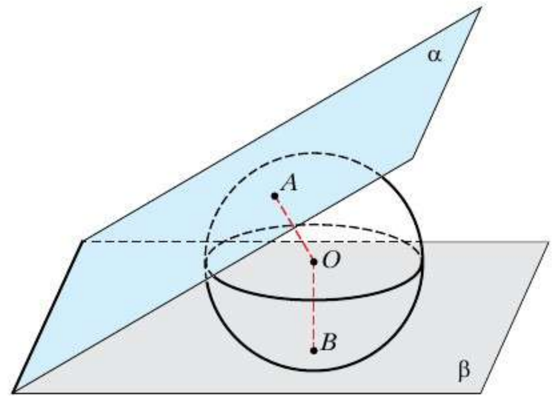


Рис. 13.6



Если фигура касается сферы, то также говорят, что фигура касается шара, ограниченного сферой. Например, можно сказать, что на рисунке 13.4 изображена плоскость α, касающаяся шара.

Теорема 13.1

Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке A. Докажем, что $OA \perp \alpha$.

Предположим, что отрезок OA является наклонной к плоскости α. Тогда расстояние от точки O до плоскости α меньше радиуса. Следовательно, сфера и плоскость α пересекаются по окружности, т. е. имеют более одной общей точки. А это противоречит тому, что плоскость α касается сферы. Значит, наше предположение неверно и радиус OA не является наклонной к плоскости α, т. е. $OA \perp \alpha$. ◄

Следствие

Касательная к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Рассмотрим сферу с центром в точке O, касающуюся граней двугранного угла в точках A и B (рис. 13.6). Тогда по теореме 13.1 $OA \perp \alpha$ и $OB \perp \beta$. Поскольку $OA = OB$, то точка O равноудалена от граней двугранного угла. Следовательно, точка O принадлежит биссектору данного двугранного угла.

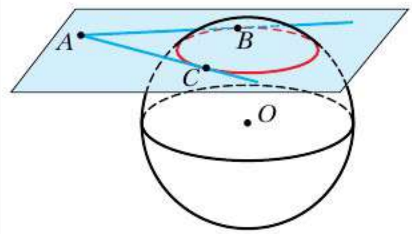
Итак, *если сфера касается граней двугранного угла, то центр сферы принадлежит биссектору двугранного угла.*

Задача. Докажите, что если через данную точку к сфере проведены касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

Решение. Пусть прямые AB и AC — произвольные касательные, проведённые к сфере, B и C — точки касания (рис. 13.7). Докажем, что $AB = AC$.

Рассмотрим плоскость ABC. Она имеет со сферой по крайней мере две общие точки. Значит, плоскость ABC пересекает сферу по окружности. Прямые AB и AC лежат с окружностью в одной плоскости и имеют с этой окружностью только по одной общей точке, т. е. они являются касательными к ней. Отсюда $AB = AC$. ◄

Рис. 13.7



1. Опишите все возможные случаи взаимного расположения сферы и плоскости.
2. Что является сечением сферы плоскостью, если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы?
3. Что называют большим кругом шара?
4. Какую плоскость называют касательной плоскостью к сфере?
5. Каким свойством обладает радиус, проведённый в точку касания плоскости и сферы?
6. Какую прямую называют касательной к сфере?

Упражнения

13.1. Даны сфера радиусом 6 см и плоскость α. Каким должно быть расстояние от центра сферы до плоскости α, чтобы:
1) сфера и плоскость не имели общих точек;
2) сфера и плоскость имели одну общую точку;
3) пересечением сферы и плоскости являлась окружность;
4) пересечением сферы и плоскости являлась окружность наибольшей возможной длины?

13.2. Диаметр сферы равен 20 см, а расстояние от её центра до плоскости α равно 12 см. Имеют ли данная сфера и плоскость α общие точки?

13.3. 1) Какая географическая параллель является большой окружностью земного шара?
2) Найдите длину полярного круга Земли, приняв, что радиус Земли равен 6400 км. Ответ округлите до тысяч километров.
3) Вычислите путь, который проделывает вследствие вращения Земли вокруг её оси за сутки населённый пункт, в котором вы живёте.

13.4. Радиус шара равен 5 см. Найдите площадь его большого круга.

13.5. Сколько плоскостей, касающихся сферы, можно провести через точку: 1) принадлежащую этой сфере; 2) расположенную вне сферы?

13.6. Сколько прямых, касающихся сферы, можно провести через точку: 1) принадлежащую этой сфере; 2) расположенную вне сферы?

13.7. Докажите, что если плоскость α пересекает сферу с центром в точке O по окружности с центром в точке O_1, то $OO_1 \perp \alpha$.

13.8. Сфера пересечена плоскостью, расстояние от которой до центра сферы равно 6 см. Длина линии пересечения сферы с плоскостью равна 16π см. Найдите радиус сферы.

13.9. Пересечением шара радиусом 13 см и плоскости является круг, площадь которого равна 25π см^2. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

13.10. Через конец диаметра шара радиусом R проведена плоскость, образующая с этим диаметром угол α, $\alpha \neq 90°$. Найдите площадь образовавшегося сечения шара.

13.11. Найдите длину линии пересечения сферы с плоскостью, удалённой от центра сферы на 2 см, если радиус сферы, проведённый в одну из точек сечения, образует с плоскостью сечения угол 30°.

13.12. Докажите, что сечения сферы, плоскости которых равноудалены от её центра, имеют равные радиусы.

13.13. Докажите, что из двух сечений сферы больший радиус имеет сечение, плоскость которого менее удалена от центра сферы.

13.14. Чему равен радиус сферы, касающейся плоскостей $y = -4$ и $y = 10$?

13.15. Сфера, радиус которой равен R, касается граней двугранного угла, равного α. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

13.16. Расстояние от центра шара, касающегося граней двугранного угла, до его ребра равно 8 см. Найдите площадь большого круга шара, если величина двугранного угла равна 120°.

13.17. Есть ли у вас замечания к следующим рассуждениям: «Пусть точка O – центр сферы, A и B – произвольные точки сферы. Через три точки A, B и O проведём плоскость, пересекающую сферу по окружности, являющейся большой окружностью сферы. Следовательно, через любые две точки сферы можно провести её большую окружность и притом только одну»?

13.18. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиусом 26 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его стороны равны 12 см и 16 см.

13.19. На поверхности шара отмечены точки A, B и C такие, что $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ABC, если его радиус равен 17 см.

13.20. Вершины треугольника со сторонами 1 см, $\sqrt{3}$ см и 2 см лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от её центра до плоскости этого треугольника равно $4\sqrt{3}$ см.

13.21. Расстояние между равновеликими параллельными сечениями шара, радиус которого 15 см, равно 18 см. Найдите площадь каждого из этих сечений.

13.22. На радиусе OA сферы с центром O отмечены точки B и C, причём точка B лежит между точками O и C. Через каждую из точек B и C проведена плоскость, перпендикулярная прямой OA. Окружности, образовавшиеся в сечении, имеют длины 24π см и 18π см, а расстояние между этими плоскостями равно 3 см. Найдите радиус сферы.

13.23. Через точку A $(-12; 3; -4)$, принадлежащую сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси абсцисс. Найдите длину окружности, образовавшейся в сечении.

13.24. Через точку B $(2; -3; 6)$, принадлежащую сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, проведена плоскость, перпендикулярная оси аппликат. Найдите площадь образовавшегося сечения шара, ограниченного данной сферой.

13.25. Какая фигура является геометрическим местом центров сфер, которые:

1) касаются данной плоскости в данной точке;

2) имеют данный радиус и касаются данной плоскости?

13.26. Радиус сферы равен 40 см. Точка A, принадлежащая плоскости, касающейся этой сферы, удалена от точки касания на 9 см. Найдите расстояние от точки A до ближайшей к ней точки сферы.

13.27. Через точку M сферы радиусом 112 см проведена касательная плоскость. На этой плоскости отмечена точка K, расстояние от которой до наиболее удалённой от неё точки сферы равно 225 см. Найдите расстояние между точками M и K.

13.28. Два шара, радиусы которых равны 7 см и 9 см, имеют общий центр. Плоскость α касается меньшего шара. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

13.29. Составьте уравнение сферы, которая касается каждой из координатных плоскостей и проходит через точку M (10; −10; 8).

13.30. Составьте уравнение сферы радиусом 4, которая касается каждой из координатных плоскостей, если абсцисса и ордината центра сферы — отрицательные числа, а аппликата — положительное.

13.31. Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке A (−2; 1; 2).

13.32. Точки A, B, C, D, E и F принадлежат сфере. Докажите, что прямые, перпендикулярные плоскостям ABC и DEF и проходящие через центры описанных окружностей треугольников ABC и DEF, пересекаются или совпадают.

13.33. Через точку к сфере проведены касательные. Найдите геометрическое место точек касания.

13.34. Через точку A проведены касательные к сфере. Расстояние от точки A до каждой точки касания равно 40 см, а до ближайшей к ней точки сферы — 20 см. Найдите длину линии, которая является геометрическим местом точек касания.

13.35. Стороны треугольника равны 17 см, 28 см и 39 см и касаются данной сферы. Расстояние от центра сферы до плоскости этого треугольника равно 12 см. Найдите радиус сферы.

13.36. Стороны ромба касаются сферы, диаметр которой равен a. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если его сторона равна a, а острый угол равен α.

13.37. Сечения шара, плоскости которых перпендикулярны, имеют общую хорду длиной 12 см. Найдите радиус шара, если площади данных сечений равны 64π см^2 и 100π см^2.

13.38. Сечения шара, плоскости которых перпендикулярны, имеют общую хорду. Расстояние от центра шара до плоскости одного из данных сечений равно 4 см, а до плоскости другого — 5 см. Найдите длину общей хорды сечений, если радиус шара равен $5\sqrt{2}$ см.

13.39. Через точку A проведены две прямые, касающиеся сферы с центром O в точках B и C. Плоскости AOB и AOC перпендикулярны, $AO = 9$ см, радиус сферы равен 6 см. Найдите расстояние между точками B и C.

13.40. Через точку M проведены две прямые, касающиеся сферы с центром O в точках A и B. Двугранный угол с гранями AMO и BMO равен $120°$, $AB = 6$ см, $AM = 4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус сферы.

13.41. В шаре радиусом R проведены два равных сечения, имеющие общую хорду длиной a. Угол между плоскостями сечений равен α. Найдите площадь каждого из данных сечений.

Упражнения для повторения

13.42. Отрезок BD – высота равнобедренного треугольника ABC, проведённая к его основанию. Точка M – середина отрезка BD. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите, в каком отношении точка K делит сторону BC, считая от точки B.

13.43. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равна 32 см, а радиус вписанной окружности – 12 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

13.44. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами $2\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{5}$ см. Боковые рёбра пирамиды равны, а её высота – $3\sqrt{19}$ см. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно боковому ребру.

§ 14. Многогранники, вписанные в сферу

Определение

Многогранник называют вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около многогранника.

Из определения следует, что если многогранник вписан в сферу, то центр сферы равноудалён от всех его вершин. Верно и обратное утверждение: *если для данного многогранника существует точка, равноудалённая от всех его вершин, то около этого многогранника можно описать сферу.*

Например, все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда равноудалена от всех его вершин. Значит, около этого многогранника можно описать сферу (рис. 14.1).

На рисунке 14.2 изображён тетраэдр $DABC$, в котором $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Поскольку середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то середина ребра AB является точкой, равноудалённой от всех вершин тетраэдра $DABC$, т. е. является центром сферы, описанной около данного тетраэдра.

Рис. 14.1

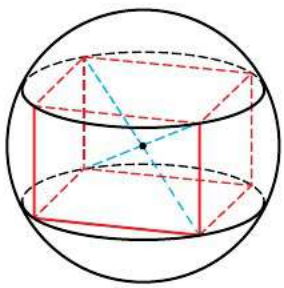
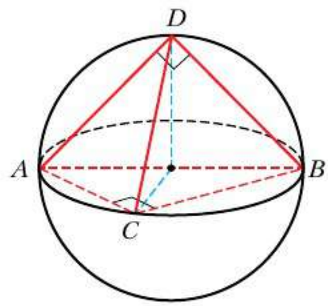


Рис. 14.2



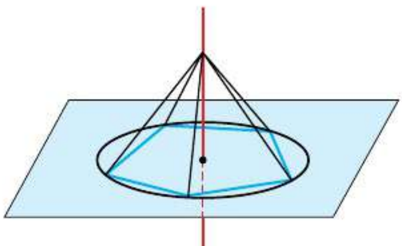
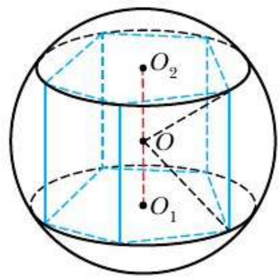
Если многогранник вписан в сферу, то также говорят, что многогранник вписан в шар, ограниченный этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 14.1 и 14.2 изображены соответственно прямоугольный параллелепипед и тетраэдр, вписанные в шар, или около каждого из указанных многогранников описан шар.

Если многогранник вписан в сферу, то плоскости его граней пересекают сферу по окружностям. Следовательно, *каждая грань многогранника, вписанного в сферу, является многоугольником, вписанным в окружность.*

Значит, если около какой-то грани многогранника нельзя описать окружность, то около этого многогранника нельзя описать сферу. Например, около параллелограмма, отличного от прямоугольника, описать окружность нельзя. Следовательно, нельзя описать сферу около наклонной призмы.

Задача 1. Докажите, что если около основания прямой призмы можно описать окружность, то такую призму можно вписать в сферу, а центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

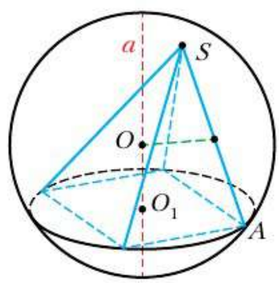
Решение. Вы знаете, что геометрическим местом точек, равноудалённых от вершин данного многоугольника, вписанного в окружность, является прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника и проходящая через центр этой окружности (рис. 14.3). Следовательно, если точка, равноудалённая от всех вершин рассматриваемой призмы, существует, то она лежит на прямой O_1O_2, где O_1 и O_2 – центры описанных окружностей оснований призмы (рис. 14.4). Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что середина O отрезка O_1O_2 – искомая точка, т. е. точка O – центр сферы, описанной около прямой призмы. ◄

Рис. 14.3	Рис. 14.4
	

Из сказанного следует, что *около любой правильной призмы можно описать сферу.*

<u>Задача 2.</u> Докажите, что если около основания пирамиды можно описать окружность, то такую пирамиду можно вписать в сферу.

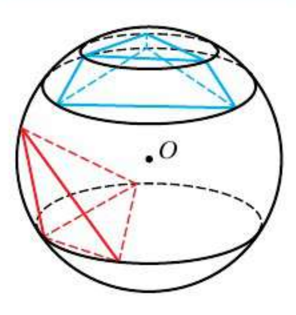
Рис. 14.5



Решение. Вы знаете, что если точка, равноудалённая от всех вершин основания пирамиды, существует, то она принадлежит прямой a (рис. 14.5), перпендикулярной основанию пирамиды и проходящей через центр O_1 описанной около основания окружности (см. ключевую задачу 1 из § 10 учебника «Геометрия. 10 класс»).

Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную боковому ребру SA и проходящую через его середину. Очевидно, что эта плоскость не параллельна прямой a и не содержит её. Пусть $a \cap \alpha = O$. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин основания и $OS = OA$, то точка O равноудалена от всех вершин пирамиды, а значит, она является центром сферы, описанной около рассматриваемой пирамиды. ◀

Рис. 14.6



Из доказанного следует, что *около любого тетраэдра можно описать сферу.*

Также *сферу можно описать около правильной пирамиды. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды.*

Центр окружности, описанной около многоугольника, может принадлежать многоугольнику, в частности лежать на стороне, а может и не принадлежать многоугольнику. Аналогичная ситуация возникает и в пространстве: центр сферы, описанной около многогранника, может ему принадлежать (см. рис 14.5), в частности лежать на грани (см. рис. 14.2), и может находиться вне многогранника (рис. 14.6).

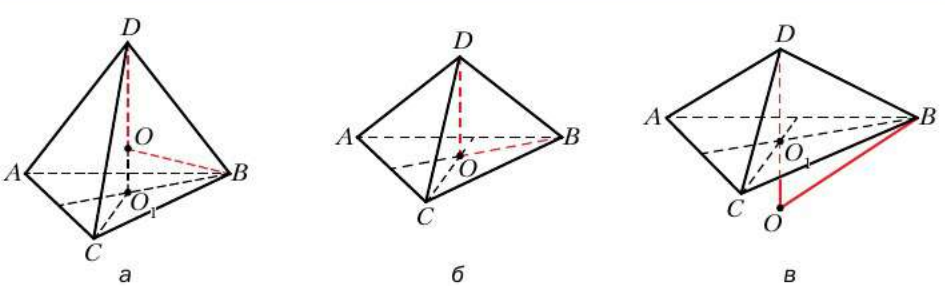
Задача 3. В треугольной пирамиде каждое боковое ребро равно b, а высота равна h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение. Пусть $DABC$ – данная треугольная пирамида, точка O_1 – центр основания ABC. По условию $DB = b$, $DO_1 = h$.

Существует три случая (рис. 14.7): центр сферы, описанной около пирамиды, может либо принадлежать внутренней области пирамиды, либо принадлежать её грани, либо не принадлежать пирамиде.

Понятно, что во всех трёх случаях центр O сферы, описанной около данной пирамиды, принадлежит прямой DO_1 (см. рис. 14.7). Отрезки OD и OB – радиусы сферы.

Рис. 14.7



Рассмотрим случай, когда центр O сферы лежит между точками D и O_1 (см. рис. 14.7, *а*).

Из прямоугольного треугольника DO_1B получаем: $O_1B^2 = DB^2 - DO_1^2$. Отсюда $O_1B^2 = b^2 - h^2$.

Пусть радиус сферы равен R. Тогда $OO_1 = h - R$. Из прямоугольного треугольника OO_1B получаем: $OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2$. Имеем: $R^2 = (h - R)^2 + b^2 - h^2$. Отсюда $R = \frac{b^2}{2h}$.

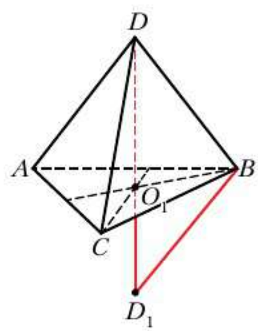
Осталось рассмотреть ещё два случая: центр O сферы совпадает с точкой O_1 (см. рис. 14.7, *б*); центр O сферы лежит вне пирамиды (рис. 14.7, *в*). Рассмотрев эти случаи самостоятельно, вы сможете убедиться, что ответ не изменится: $R = \frac{b^2}{2h}$.

Приведём ещё один способ решения этой задачи, в котором нет необходимости рассматривать три случая расположения центра описанной сферы.

Прямая DO_1 проходит через центр сферы и пересекает её в двух точках: в точке D и в некоторой точке D_1 (рис. 14.8). Тогда отрезок DD_1 – диаметр сферы. Плоскость DD_1B, проходя через центр сферы, пересекает её по большой окружности. Тогда треугольник DD_1B является вписанным в большую окружность сферы диаметром DD_1. Следовательно, $\angle DBD_1 = 90°$. Используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, можно записать: $DB^2 = DO_1 \cdot DD_1$. Отсюда $b^2 = h \cdot 2R$; $R = \frac{b^2}{2h}$.

Ответ: $\frac{b^2}{2h}$. ◄

Рис. 14.8



1. Какой многогранник называют вписанным в сферу?
2. В каком случае около многогранника можно описать сферу?
3. В каком случае призму можно вписать в сферу?
4. Где расположен центр сферы, описанной около правильной призмы?
5. В каком случае пирамиду можно вписать в сферу?
6. Где расположен центр сферы, описанной около правильной пирамиды?

Упражнения

14.1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 6 см и 12 см. Найдите радиус сферы, описанной около данного параллелепипеда.

14.2. В сферу радиуса R вписан куб. Найдите площадь поверхности этого куба.

14.3. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 2 см, а сторона основания – 12 см. Найдите радиус шара, в который вписана данная призма.

14.4. В шар радиуса R вписана правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна a. Найдите площадь боковой поверхности данной призмы.

14.5. Боковое ребро правильной шестиугольной призмы равно 8 см, а диагональ боковой грани – 13 см. Найдите радиус шара, описанного около данной призмы.

14.6. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Радиус шара, описанного около данной призмы, равен 13 см. Найдите боковое ребро призмы.

14.7. Основанием прямой призмы является треугольник с углом 150° и противолежащей ему стороной, равной 15 см. Боковое ребро призмы равно 16 см. Найдите радиус сферы, в которую вписана данная призма.

14.8. В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания которой равна 2 см, а высота – 4 см. Найдите радиус шара.

14.9. В шар радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, боковое ребро которой образует с плоскостью основания угол α. Найдите высоту пирамиды.

14.10. Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен α, а сторона основания равна a. Найдите радиус сферы, описанной около данной пирамиды.

14.11. Двугранный угол правильной четырёхугольной пирамиды при ребре основания равен α, а сторона основания равна a. Найдите радиус сферы, описанной около данной пирамиды.

14.12. В шар вписана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите радиус шара.

14.13. Центр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, делит её высоту на отрезки длиной 6 см и 3 см. Найдите сторону основания пирамиды.

14.14. Двугранный угол правильной треугольной пирамиды при ребре основания равен α, а радиус сферы, описанной около данной пирамиды, равен R. Найдите высоту пирамиды.

14.15. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра, ребро которого равно a.

14.16. Докажите, что если боковые рёбра пирамиды равны, то около неё можно описать сферу, причём центр этой сферы принадлежит прямой, содержащей высоту пирамиды.

14.17. В треугольной пирамиде каждое боковое ребро равно b, а высота равна h. Воспользовавшись результатом задачи 3 из § 14, определите, при каком соотношении между боковым ребром b и высотой h центр описанной около пирамиды сферы принадлежит пирамиде, а при каком соотношении – не принадлежит пирамиде.

14.18. Основанием пирамиды является прямоугольник с углом α между диагоналями, а каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Радиус шара, описанного около данной пирамиды, равен R. Найдите площадь основания пирамиды.

14.19. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 10 см и 24 см, а боковые рёбра пирамиды равны. Найдите высоту пирамиды, если радиус шара, описанного около этой пирамиды, равен 13 см.

14.20. Основанием пирамиды является треугольник, один из углов которого равен 60°, а противолежащая ему сторона – $4\sqrt{3}$ см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 5 см. Найдите расстояние от центра шара, описанного около данной пирамиды, до плоскости её основания.

14.21. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен 25 см, а расстояние от его центра до плоскости основания пирамиды равно 7 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

14.22. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если радиус описанного около неё шара равен 4 см.

14.23. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 3 см. Одно из боковых рёбер пирамиды равно 2 см и перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

14.24. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья грань образует с основанием угол α. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

14.25. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны $5\sqrt{3}$ см и $12\sqrt{3}$ см, а её высота – 17 см. Найдите радиус шара, описанного около данной усечённой пирамиды.

14.26. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 2 см и 14 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите радиус шара, описанного около данной усечённой пирамиды.

14.27. Боковые рёбра треугольной пирамиды равны 4 см, 6 см и 12 см, а все плоские углы при вершине пирамиды – прямые. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

14.28. Найдите радиус шара, описанного около усечённой пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle ABC = 90°$, $AB = 8$ см, $BC = 16\sqrt{2}$ см, $B_1C_1 = 12\sqrt{2}$ см, а высота пирамиды равна 3 см.

Упражнения для повторения

14.29. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 12 см, а меньшая боковая сторона – $4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь трапеции, если один из её углов равен 120°.

14.30. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 20 см, а высота, проведённая к боковой стороне, – 24 см. Найдите площадь данного треугольника.

14.31. Точки A (3; –1; 0), B (1; 0; 2) и C (–1; 3; 2) являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите диагональ BD.

§ 15. Многогранники, описанные около сферы

Определение

Многогранник называют описанным около сферы, если все его грани касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в многогранник.

Из определения следует, что если многогранник описан около сферы, то центр сферы равноудалён от всех плоскостей, содержащих его грани. Верно и такое утверждение: *если для данного выпуклого многогранника существует принадлежащая ему точка и равноудалённая от всех плоскостей, содержащих его грани, то в этот многогранник можно вписать сферу.*

Например, точка пересечения диагоналей куба равноудалена от всех плоскостей граней куба. Следовательно, в куб можно вписать сферу (рис. 15.1).

Если многогранник описан около сферы, то также говорят, что многогранник описан около шара, ограниченного этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунке 15.1 изображён куб, описанный около шара, или шар, вписанный в куб.

Если сфера касается граней двугранного угла, то её центр принадлежит биссектору этого угла. Следовательно, если сфера вписана в многогранник, то её центр принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника при его рёбрах. Верно и такое утверждение: *если все биссекторы двугранных углов выпуклого многогранника при его рёбрах имеют общую точку, то в этот многогранник можно вписать сферу.*

Используя это утверждение, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что в любом тетраэдре существует точка, равноудалённая от всех плоскостей, содержащих его грани. Следовательно, *в любой тетраэдр можно вписать сферу.*

Задача 1. Докажите, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то в такую пирамиду можно вписать сферу.

Решение. В курсе геометрии 10 класса было доказано, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то каждая точка высоты пирамиды равноудалена от плоскостей её боковых граней (рис. 15.2). Тогда точка пересечения биссектора двугранного угла при ребре основания с высотой пирамиды равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды. ◄

Рис. 15.1

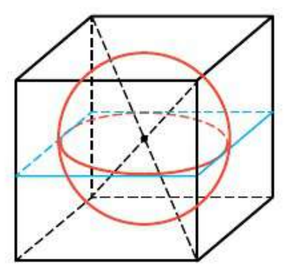
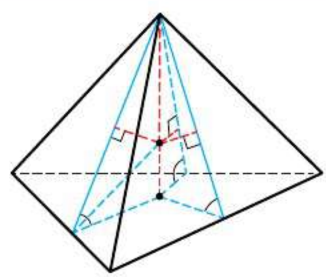


Рис. 15.2



Из доказанного следует, что *в любую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы принадлежит высоте пирамиды.*

Задача 2. Докажите, что если в основание прямой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности, то в такую призму можно вписать сферу.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 – центры окружностей радиусом r, вписанных в основания прямой призмы (рис. 15.3). Прямая O_1O_2 параллельна плоскости каждой боковой грани призмы. Точка O_1 удалена от плоскости каждой боковой грани призмы на расстояние r. Следовательно, любая точка прямой O_1O_2 удалена от плоскости каждой боковой грани призмы на расстояние r. Поскольку $O_1O_2 = 2r$, то середина O отрезка O_1O_2 равноудалена от плоскостей всех граней призмы. ◄

Из доказанного следует, что *в правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы.*

Справедливо и такое утверждение: *если в прямую призму можно вписать сферу, то в основание призмы можно вписать окружность радиусом, равным радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы*. Докажите это утверждение самостоятельно.

Задача 3. В прямую четырёхугольную призму, основанием которой является равнобокая трапеция с основаниями 16 см и 4 см, вписана сфера. Найдите боковое ребро призмы.

Решение. Поскольку в прямую призму вписана сфера, то в основание призмы можно вписать окружность, и диаметр этой окружности равен диаметру вписанной сферы, т. е. боковому ребру призмы.

Поскольку основанием призмы является трапеция, то диаметр вписанной окружности равен высоте этой трапеции. Найдём высоту трапеции.

Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – основание призмы (рис. 15.4). Поскольку в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD$.

Рис. 15.3

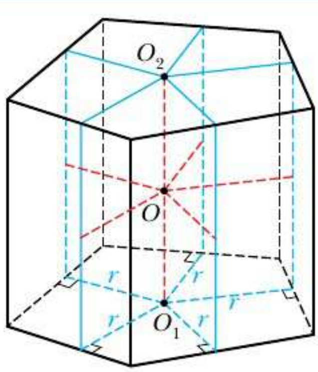
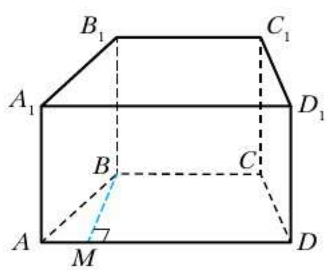


Рис. 15.4



С учётом условия получаем: $AB + CD = 20$ см. Поскольку $AB = CD$, то $AB = 10$ см.

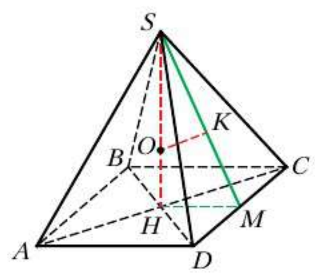
Проведём высоту BM трапеции.

Поскольку трапеция $ABCD$ равнобокая, то $AM = \dfrac{AD - BC}{2}$, т. е. $AM = 6$ см. Из прямоугольного треугольника ABM получаем: $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2}$. Тогда $BM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Тогда диаметр вписанной сферы равен 8 см, а следовательно, и боковое ребро равно 8 см.

Ответ: 8 см. ◄

Рис. 15.5



Задача 4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$, у которой ребро основания AB равно a, а высота – h.

Решение. Поскольку данная пирамида правильная, то центр O вписанной сферы принадлежит высоте SH пирамиды, где H – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ (рис. 15.5). Тогда отрезок OH – радиус вписанной сферы. Пусть $OH = r$.

В грани DSC проведём апофему SM. Имеем: $DC \perp SH$, $DC \perp SM$. Следовательно, $DC \perp HSM$. В плоскости HSM проведём $OK \perp SM$, точка K принадлежит апофеме SM. Поскольку $DC \perp HSM$ и $OK \subset HSM$, то $DC \perp OK$. Имеем: $OK \perp SM$, $OK \perp DC$. Следовательно, $OK \perp DSC$. Значит, отрезок OK – радиус вписанной сферы, $OK = r$.

Прямоугольные треугольники KSO и HSM имеют общий острый угол. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда можно записать: $\dfrac{OK}{HM} = \dfrac{SO}{SM}$. Имеем: $SO = h - r$, $HM = \dfrac{a}{2}$, $SM = \sqrt{HM^2 + SH^2}$, т. е. $SM = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + h^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}$.

Получаем: $\dfrac{r}{\frac{a}{2}} = \dfrac{h - r}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}}$. Отсюда $r\sqrt{a^2 + 4h^2} = ah - ar$;

$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}$. ◄

1. Какой многогранник называют описанным около сферы?
2. В какой многогранник можно вписать сферу?
3. Каким свойством должны обладать биссекторы двугранных углов при рёбрах выпуклого многогранника, чтобы в этот многогранник можно было вписать сферу?
4. Где расположен центр сферы, вписанной в правильную пирамиду?
5. Какими свойствами должны обладать основание и высота прямой призмы, чтобы в неё можно было вписать сферу?
6. Каким свойством должна обладать высота правильной призмы, чтобы в неё можно было вписать сферу?
7. Какая точка является центром шара, вписанного в правильную призму?

Упражнения

15.1. Чему равен радиус шара, вписанного в куб с ребром a?

15.2. В правильную треугольную призму вписан шар, радиус которого равен R. Найдите площадь полной поверхности призмы.

15.3. В правильную шестиугольную призму вписан шар, радиус которого равен R. Найдите площадь полной поверхности призмы.

15.4. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Найдите радиус шара, вписанного в данную призму.

15.5. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник. Высота этого треугольника, проведённая к его основанию, равна h и образует с боковой стороной треугольника угол α. Найдите высоту призмы, если известно, что в эту призму можно вписать шар.

15.6. Основанием прямой призмы является прямоугольная трапеция, бóльшая боковая сторона которой равна 12 см, а острый угол — 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что в эту призму можно вписать шар.

15.7. Основанием прямой призмы является ромб, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что в эту призму можно вписать шар.

15.8. Основанием прямой призмы, в которую вписан шар, является ромб с острым углом α. Найдите угол между меньшей диагональю призмы и плоскостью её основания.

15.9. Найдите радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α.

15.10. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α.

15.11. Найдите радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр, ребро которого равно a.

15.12. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а боковое ребро — $\sqrt{21}$ см. Найдите радиус сферы, вписанной в данную пирамиду.

15.13. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и углом α. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

15.14. Треугольник ABC является основанием пирамиды $DABC$, $AB = BC$, $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

15.15. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны, а площадь основания равна S. Центр шара, вписанного в пирамиду, делит её высоту в отношении 2 : 1, считая от вершины пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

15.16. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 45°. В каком отношении центр вписанного в эту пирамиду шара делит её высоту, считая от вершины пирамиды?

15.17. Шар, вписанный в правильную четырёхугольную пирамиду, касается одной из её боковых граней в точке A. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через точку A параллельно основанию пирамиды, если двугранный угол пирамиды при ребре основания равен 60°, а расстояние от центра шара до вершины пирамиды — 8 см.

15.18. Двугранный угол правильной треугольной пирамиды при ребре основания равен 45°, а радиус вписанной сферы — $\sqrt{2}$ см. Эта сфера касается одной из боковых граней пирамиды в точке M. Найдите длину линии пересечения данной сферы и плоскости, проходящей через точку M параллельно основанию пирамиды.

15.19. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

15.20. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

15.21. Докажите, что если центр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, и центр вписанного в неё шара совпадают, то данная пирамида является правильным тетраэдром.

15.22. Треугольник ABC является основанием пирамиды $DABC$, $AB = BC = DB = a$, $\angle ABC = 90^\circ$, $DB \perp ABC$. Найдите радиус сферы, вписанной в данную пирамиду.

15.23. Около шара описана правильная треугольная усечённая пирамида, стороны оснований которой равны 6 см и 12 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

15.24. В правильную четырёхугольную усечённую пирамиду вписан шар, радиус которого равен R. Двугранный угол усечённой пирамиды при ребре её большего основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

Упражнения для повторения

15.25. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см и одна из них перпендикулярна стороне.

15.26. Высота ромба равна 12 см, а меньшая диагональ — 15 см. Найдите площадь ромба.

15.27. Коллинеарны ли векторы $\vec{m}(8; -10; 6)$ и $\vec{n}(-4; 5; -3)$? Найдите координаты вектора $\vec{k}$, который коллинеарен вектору $\vec{n}$ и модуль которого в три раза больше модуля вектора $\vec{n}$.

§ 16. Комбинации цилиндра и сферы, конуса и сферы

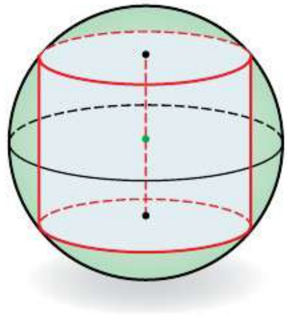
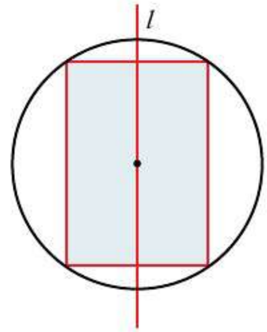
Определение

Цилиндр называют вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра принадлежат сфере (рис. 16.1)**. При этом сферу называют описанной около цилиндра.**

Вы знаете, что около любого прямоугольника можно описать окружность, причём центр описанной окружности является серединой отрезка, соединяющего середины противолежащих сторон прямоугольника.

Рассмотрим прямоугольник, около которого описана окружность. Прямая l, проходящая через середины противолежащих сторон прямоугольника, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.2. Будем вращать прямоугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около цилиндра.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середина отрезка, соединяющего центры осно-*

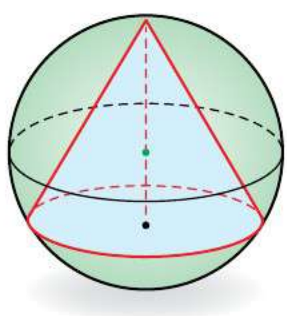
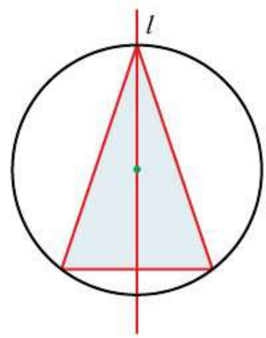
Рис. 16.1	Рис. 16.2
	

ваний цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

Определение

Конус называют вписанным в сферу, если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере (рис. 16.3)**. При этом сферу называют описанной около конуса.**

Рассмотрим равнобедренный треугольник, около которого описана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.4. Будем вращать треугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около конуса.

Рис. 16.3	Рис. 16.4
	

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.*

Определение

Усечённый конус называют вписанным в сферу, если окружности оснований конуса принадлежат сфере (рис. 16.5)**. При этом сферу называют описанной около усечённого конуса.**

Если цилиндр (конус, усечённый конус) вписан в сферу, то также говорят, что цилиндр (конус, усечённый конус) вписан в шар, ограниченный этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 16.1, 16.3 и 16.5 изображены соответственно цилиндр, конус и усечённый конус, вписанные в шар, или шар, описанный около каждого из указанных тел вращения.

Определение

Цилиндр называют описанным около сферы, если все образующие цилиндра и его основания касаются сферы (рис. 16.6)**. При этом сферу называют вписанной в цилиндр.**

Вы знаете, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то он является квадратом.

Рассмотрим квадрат, в который вписана окружность. Прямая l, проходящая через центр окружности перпендикулярно противолежащим сторонам квадрата, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.7. Будем вращать квадрат вместе с вписанной в него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в цилиндр.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.*

Определение

Конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основание касаются сферы (рис. 16.8)**. При этом сферу называют вписанной в конус.**

Рис. 16.5

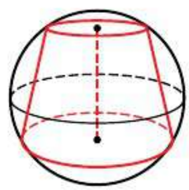


Рис. 16.6

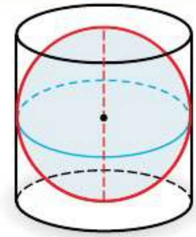
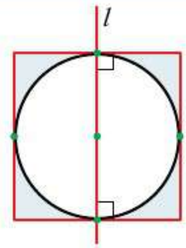


Рис. 16.7



Рассмотрим равнобедренный треугольник, в который вписана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.9. Будем вращать равнобедренный треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в конус.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *в любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.*

Определение

Усечённый конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основания касаются сферы (рис. 16.10)**. При этом сферу называют вписанной в усечённый конус.**

Если цилиндр (конус, усечённый конус) описан около сферы, то также говорят, что цилиндр (конус, усечённый конус) описан около шара, ограниченного этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 16.6, 16.8 и 16.10 изображены соответственно цилиндр, конус и усечённый

Рис. 16.8

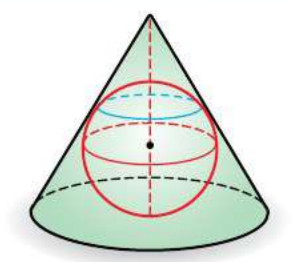


Рис. 16.9

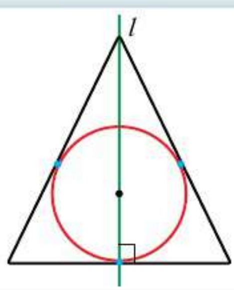
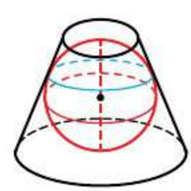


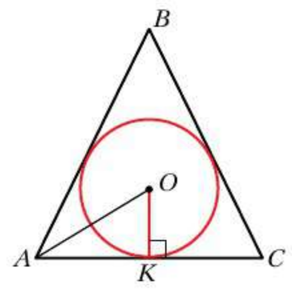
Рис. 16.10



конус, описанные около шара, или шар, вписанный в каждое из указанных тел вращения.

Задача. Найдите радиус сферы, вписанной в конус, радиус основания которого равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

Рис. 16.11



Решение. На рисунке 16.11 изображён равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, являющийся осевым сечением данного конуса, и вписанная в него окружность. Радиус этой окружности равен радиусу сферы, вписанной в конус.

Пусть точка O — центр окружности и K — точка касания этой окружности со стороной AC. Тогда $OK \perp AC$ и $AK = KC$, отрезок AK — радиус основания конуса.

По условию задачи $\angle BAC = \alpha$, $AK = r$. Поскольку O — это точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$.

Из прямоугольного треугольника AOK получаем: $OK = AK \operatorname{tg} \angle OAK$, т. е. $OK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. ◄

1. Какую сферу называют описанной около цилиндра?
2. Какая точка является центром сферы, описанной около цилиндра?
3. Чему равен радиус сферы, описанной около цилиндра?
4. Какую сферу называют описанной около конуса? усечённого конуса?
5. Где расположен центр сферы, описанной около конуса? усечённого конуса?
6. Какую сферу называют вписанной в цилиндр?
7. В каком случае в цилиндр можно вписать сферу?
8. Какая точка является центром сферы, вписанной в цилиндр?
9. Чему равен радиус сферы, вписанной в цилиндр?
10. Какую сферу называют вписанной в конус? в усечённый конус?
11. Где расположен центр сферы, вписанной в конус? в усечённый конус?

Упражнения

16.1. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а его высота – 15 см. Найдите радиус шара, описанного около данного цилиндра.

16.2. Высота цилиндра равна $4\sqrt{3}$ см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите радиус сферы, описанной около данного цилиндра.

16.3. Осевое сечение конуса является прямоугольным треугольником, а диаметр основания конуса равен 10 см. Найдите радиус сферы, описанной около данного конуса.

16.4. Образующая конуса длиной 9 см равна диаметру его основания. Найдите радиус сферы, описанной около данного конуса.

16.5. Найдите радиус шара, вписанного в цилиндр, диагональ осевого сечения которого равна 8 см.

16.6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около шара, радиус которого равен R.

16.7. Образующая конуса равна диаметру его основания. Как радиус сферы, вписанной в данный конус, относится к радиусу описанной около него сферы?

16.8. Угол между образующей конуса и его высотой равен 45°, а расстояние от центра вписанного в конус шара до вершины конуса равно 4 см. Найдите радиус данного шара.

16.9. В шар вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания. Во сколько раз площадь большого круга шара больше площади основания цилиндра?

16.10. Диагональ осевого сечения цилиндра образует с высотой цилиндра угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус шара, описанного около него, равен R.

16.11. Радиус основания цилиндра равен r, а радиус шара, описанного около этого цилиндра, равен R. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

16.12. Образующая конуса равна b, а его высота – h. Найдите радиус шара, описанного около данного конуса.

16.13. Радиус описанного около конуса шара равен R. Образующую конуса видно из центра этого шара под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

16.14. Найдите радиус шара, описанного около усечённого конуса, если радиусы оснований конуса равны 5 см и 8 см, а его высота – 9 см.

16.15. Образующая усечённого конуса равна $2\sqrt{3}$ см, а радиус меньшего основания — $\sqrt{3}$ см. Найдите радиус сферы, описанной около данного усечённого конуса, если угол между его образующей и бо́льшим основанием равен 60°.

16.16. Образующая конуса равна 10 см, а радиус основания — 6 см. Найдите радиус шара, вписанного в данный конус.

16.17. В конус с образующей b и углом α при вершине осевого сечения вписан шар. Найдите радиус шара.

16.18. В усечённый конус, образующая которого равна 8 см, вписан шар. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

16.19. В усечённый конус, радиусы оснований которого равны 3 см и 4 см, вписан шар. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

16.20. Радиусы оснований усечённого конуса равны r и R. Найдите радиус сферы, вписанной в данный усечённый конус.

16.21. Угол между образующей усечённого конуса и плоскостью большего основания равен α. Найдите радиус шара, вписанного в данный усечённый конус, и радиусы оснований усечённого конуса, если его образующая равна b.

16.22. Радиус основания конуса равен 4 см, а радиус описанного около него шара — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

16.23. Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 см и 4 см, а радиус описанного около него шара — 5 см. Найдите высоту усечённого конуса.

16.24. Радиус шара, вписанного в конус, равен r. Образующую конуса видно из центра вписанного шара под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

16.25. Наибольший угол между образующими конуса равен 90°. В конус вписан шар, радиус которого равен R. Найдите площадь полной поверхности конуса.

16.26. В конус, образующая которого равна 15 см, а высота — 12 см, вписана сфера. Найдите длину линии, по которой сфера касается боковой поверхности конуса.

16.27. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α, а радиус основания — R. В конус вписан шар. Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости круга, окружность которого является линией касания шара и боковой поверхности конуса.

16.28. В усечённый конус вписан шар, радиус которого равен R. Диаметр большего основания усечённого конуса видно из центра шара под углом α. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

16.29. Вокруг шара описан усечённый конус, радиусы оснований которого равны 8 см и 18 см. Найдите длину линии, по которой шар касается боковой поверхности усечённого конуса.

Упражнения для повторения

16.30. В треугольник ABC вписан ромб $AMFK$ так, что угол A у них общий, а вершина F принадлежит стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

16.31. Один из углов трапеции равен $30°$, а боковые стороны трапеции перпендикулярны. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если её средняя линия равна 10 см, а одно из оснований — 8 см.

16.32. Найдите площадь параллелограмма, построенного как на сторонах на векторах $\vec{a}\,(-2; 2; 1)$ и $\vec{b}\,(4; 8; 1)$.

Итоги главы 2

Площадь боковой поверхности цилиндра

- За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра принимают площадь его развёртки боковой поверхности.
- $S_{бок} = 2\pi rh$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности цилиндра, r — радиус основания цилиндра, h — длина высоты цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра

- $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{полн}$ — площадь полной поверхности цилиндра, $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра.
- $S_{полн} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Комбинации цилиндра и призмы

- Призму называют вписанной в цилиндр, если её основания вписаны в основания цилиндра. При этом цилиндр называют описанным около призмы.
- Призму называют описанной около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра. При этом цилиндр называют вписанным в призму.

Площадь боковой поверхности конуса

- За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса принимают площадь его развёртки боковой поверхности.
- $S_{бок} = \pi rl$, где r — радиус основания конуса, l — длина образующей конуса.

Площадь полной поверхности конуса

- $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$, где $S_{полн}$ — площадь полной поверхности конуса, $S_{осн}$ — площадь основания конуса.
- $S_{полн} = \pi rl + \pi r^2$

Площадь боковой поверхности усечённого конуса

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$, где r и r_1 — радиусы оснований, l — длина образующей усечённого конуса.

Комбинации конуса и пирамиды

- Пирамиду называют вписанной в конус, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называют описанным около пирамиды.

- **Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Сфера и шар

- **Сферой называют геометрическое место точек пространства, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу.**
- **Шаром называют геометрическое место точек пространства, расстояния от которых до заданной точки не более данного положительного числа.**

Уравнение сферы

Уравнение сферы с центром в точке A (a; b; c) и радиусом r имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Взаимное расположение сферы и плоскости

- **Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечением сферы плоскостью является окружность.**
- **Плоскость, имеющую со сферой только одну общую точку, называют касательной плоскостью к сфере. Эту общую точку называют точкой касания. В этом случае расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы.**
- **Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.**

Многогранник, вписанный в сферу

- **Многогранник называют вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около многогранника.**
- **Каждая грань многогранника, вписанного в сферу, является многоугольником, вписанным в окружность.**
- **Если около основания прямой призмы можно описать окружность, то такую призму можно вписать в сферу.**
- **Около правильной призмы можно описать сферу. Центр описанной сферы принадлежит прямой, проходящей через центры оснований призмы.**

- Около правильной пирамиды можно описать сферу. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды.
- Около любого тетраэдра можно описать сферу.

Многогранник, описанный около сферы

- Многогранник называют описанным около сферы, если все его грани касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в многогранник.
- Если для данного выпуклого многогранника существует точка, равноудалённая от всех его граней, то в этот многогранник можно вписать сферу.
- Если все биссекторы двугранных углов выпуклого многогранника при его рёбрах имеют общую точку, то в этот многогранник можно вписать сферу.
- В любой тетраэдр можно вписать сферу.
- В правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы.

Комбинации цилиндра и сферы

- Цилиндр называют вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около цилиндра.
- Около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.
- Цилиндр называют описанным около сферы, если все образующие цилиндра и его основания касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в цилиндр.
- Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.

Комбинации конуса и сферы

- Конус называют вписанным в сферу, если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около конуса.
- Около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.
- Усечённый конус называют вписанным в сферу, если окружности оснований конуса принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около усечённого конуса.
- Конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основание касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в конус.
- В любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.
- Усечённый конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основания касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в усечённый конус.

Глава 3. Объёмы тел. Площадь сферы

В этой главе вы подробнее ознакомитесь с уже известным вам понятием объёма, изучите новые формулы для вычисления объёмов многогранников и тел вращения. Научитесь находить площадь сферы.

§ 17. Объём тела. Формулы для вычисления объёма призмы

С такой величиной, как объём, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: объём пакета сока, объём стеклянной банки, показатели потребления воды или топлива на счётчиках (рис. 17.1). С понятием объёма вы познакомились в курсе математики 5 класса. Кроме того, это понятие вы неоднократно использовали, например, на уроках физики и химии.

Изучая планиметрию, вы часто встречались с такой геометрической величиной, как площадь фигуры. Объём тела в стереометрии является аналогом площади фигуры в планиметрии. Увидеть эту аналогию несложно, если сравнить определение площади многоугольника, изученное вами в 8 классе, со следующим определением.

Определение

Объёмом тела называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:
1) равные тела имеют равные объёмы;
2) если тело составлено из нескольких других тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел;
3) за единицу измерения объёма тела принимают единичный куб, т. е. куб с ребром, равным единице измерения длины.

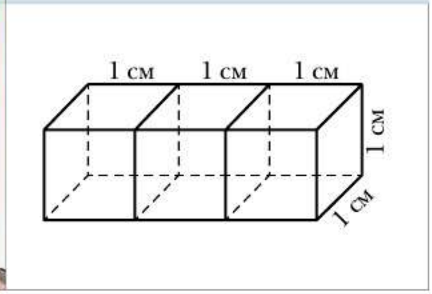
Изучение объёмов тел начнём с многогранников.

Измерить объём многогранника — это значит сравнить его объём с объёмом единичного куба. В результате получают числовое значение объёма данного многогранника. Это число показывает, во сколько раз объём данного многогранника отличается от объёма единичного куба.

Покажем, как, опираясь на данное выше определение, найти объём, например, прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1 см, 1 см и 3 см (рис. 17.2).

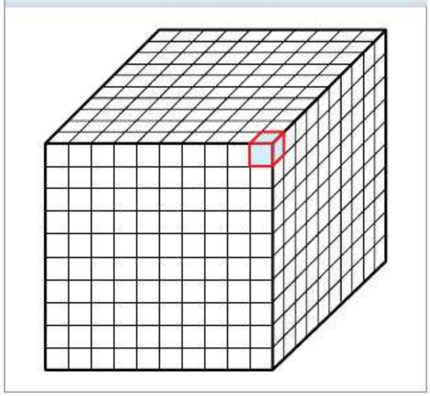
Рис. 17.1

Рис. 17.2



Такой параллелепипед можно разбить на три куба с ребром 1 см. Из свойства 2 объёма следует, что объём данного параллелепипеда равен трём объёмам куба с ребром 1 см (коротко записывают: 3 см^3).

Рис. 17.3



Ещё один пример. Найдём объём V куба с ребром 1 мм, принимая за единицу измерения длины 1 см. Если рёбра единичного куба (куба с ребром 1 см) разделить на 10 равных частей и через точки деления провести плоскости, параллельные его граням, то единичный куб разобьётся на 1000 равных кубов с ребром 1 мм (рис. 17.3). По свойству 1 объёма все они имеют один и тот же объём V. По свойству 2 объёма имеем:

$$1 = \underbrace{V + V + \ldots + V}_{1000}.$$

Отсюда $V = \dfrac{1}{1000}$ см^3.

Находить объёмы тел, в частности многогранников, опираясь только на определение, часто является сложной задачей. Например, непросто сравнить объём треугольной пирамиды с объёмом единичного куба. Недаром формулу для вычисления объёма пирамиды, найденную учёными Древней Греции, считают одним из величайших достижений античной науки.

В то же время из курса алгебры вы знаете, что для вычисления объёма тела можно воспользоваться формулой

$$V = \int_a^b S(x)dx, \qquad (*)$$

где $S(x)$ – площадь фигуры, полученной при пересечении тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, а промежуток $[a;\ b]$ является проекцией тела на ось абсцисс (рис. 17.4).

Опираясь на формулу (*), вычислим объём призмы.

Рассмотрим призму с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S.

Введём систему координат так, чтобы одно из оснований призмы лежало в плоскости $x = 0$, а высота призмы принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 17.5). Тогда проекцией призмы на ось абсцисс является промежуток $[0;\ h]$.

Рис. 17.4

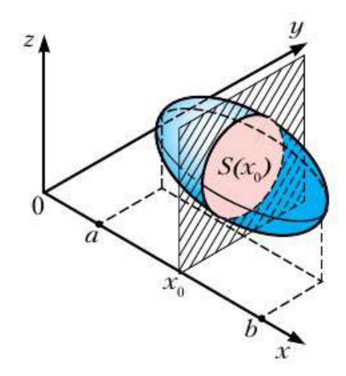
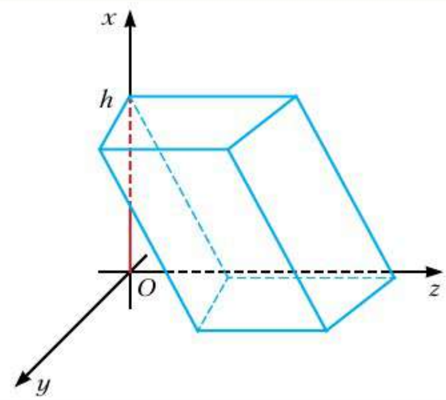


Рис. 17.5



Ясно, что сечением призмы любой плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, является многоугольник, равный основанию призмы (рис. 17.6). Поэтому $S(x) = S$ для всех значений $x \in [0;\ h]$. Опираясь на формулу (*), получаем:

$$V = \int_0^h S\,dx = Sx\Big|_0^h = Sh.$$

Таким образом,

объём V призмы с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле

$$\boxed{V = Sh}$$

<u>**Задача 1.**</u> В наклонной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Докажите, что объём такой призмы равен произведению площади сечения и бокового ребра.

Решение. Доказательство проведём для треугольной призмы. Для других n-угольных призм доказательство будет аналогичным.

Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть треугольник MPN – сечение, о котором говорится в условии (рис. 17.7).

Рис. 17.6

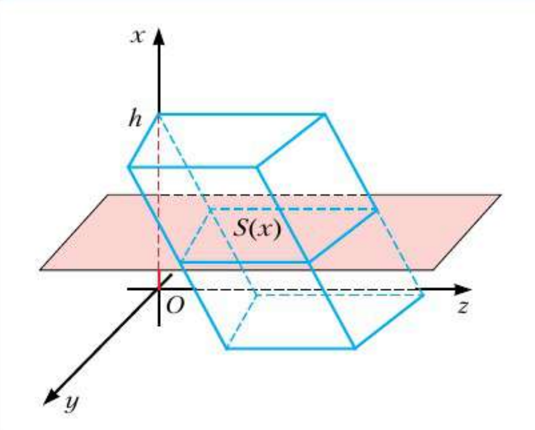
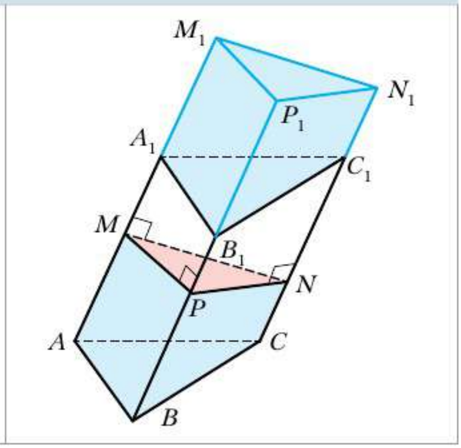


Рис. 17.7



Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ многогранника $ABCMPN$. Тогда образом треугольника ABC является треугольник $A_1B_1C_1$. Пусть образом треугольника MPN является треугольник $M_1P_1N_1$. Получаем, что образом многогранника $ABCMPN$ является многогранник $A_1B_1C_1M_1P_1N_1$. Следовательно, эти многогранники равны, а значит, равны и их объёмы.

Таким образом, призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $MPNM_1P_1N_1$ имеют равные объёмы. Призма $MPNM_1P_1N_1$ является прямой, поэтому её объём V равен $S_{MPN} \cdot MM_1$. Поскольку $MM_1 = AA_1$, то объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $S_{MPN} \cdot AA_1$. ◄

1. Что называют объёмом тела?

2. Что значит измерить объём многогранника?

3. По какой формуле вычисляют объём призмы?

Упражнения

17.1. Чему равен объём призмы, площадь основания которой равна 12 см^2, а высота – 5 см?

17.2. Найдите объём куба, диагональ грани которого равна d.

17.3. Как изменится объём куба, если каждое его ребро увеличить в 3 раза?

17.4. Найдите объём правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно a.

17.5. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, каждое ребро которой равно a.

17.6. Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, сторона основания которой равна a, а угол между диагональю призмы и плоскостью основания равен α.

17.7. Высота правильной треугольной призмы равна h, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём призмы.

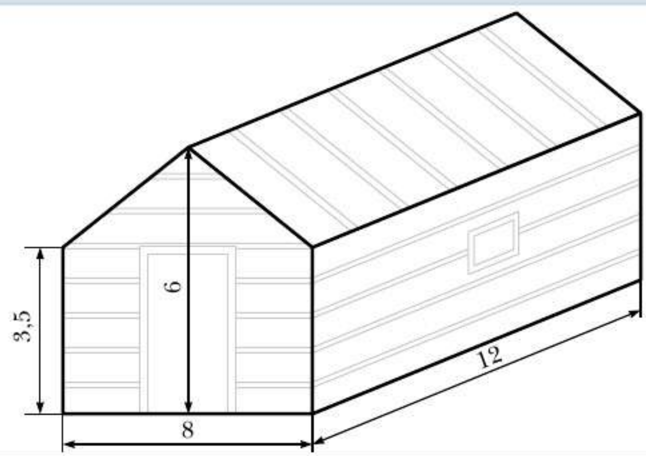
17.8. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 6 см и 9 см. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму данного параллелепипеда.

17.9. Рёбра прямоугольного параллелепипеда пропорциональны числам 2, 3 и 6, а его диагональ равна 14 см. Найдите объём параллелепипеда.

17.10. Сечение железнодорожной насыпи имеет форму трапеции, нижнее основание которой равно 15 м, верхнее основание – 8 м, а высота – 3,2 м. Сколько кубических метров земли необходимо, чтобы построить 1 км насыпи?

17.11. Цех, в котором должны трудиться a рабочих, имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Чтобы помещение цеха удовлетворяло санитарным нормам, на каждого рабочего цеха должны приходиться b м^3 воздуха. Какой должна быть в этом случае высота h цеха, если площадь его пола составляет S м^2?

Рис. 17.8



17.12. Найдите вместимость сарая с двускатной крышей (рис. 17.8), если длина сарая равна 12 м, ширина – 8 м, высота стен – 3,5 м, а высота конька крыши – 6 м (толщиной стен пренебречь).

17.13. Основание прямой призмы – ромб со стороной 8 см и углом 60°. Меньшая диагональ призмы равна 17 см. Найдите объём призмы.

17.14. Основание прямой призмы – равнобокая трапеция с основаниями 5 см и 11 см и диагональю 10 см. Диагональ призмы равна 26 см. Найдите объём призмы.

17.15. Основанием наклонной призмы является параллелограмм со сторонами 3 см и 8 см и углом 30°. Боковое ребро призмы равно 12 см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём призмы.

17.16. Основанием наклонной призмы является треугольник со сторонами $4\sqrt{3}$ см и 5 см и углом 120° между ними. Боковое ребро призмы равно 20 см и образует с высотой призмы угол 60°. Найдите объём призмы.

17.17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 12 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Угол между диагональю основания и одной из его сторон равен 60°. Найдите объём параллелепипеда.

17.18. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна d и образует с плоскостью боковой грани угол α. Найдите объём призмы.

17.19. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α, а с плоскостью боковой грани – угол β. Найдите объём параллепипеда.

17.20. Найдите объём правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, если её диагонали A_1D и A_1E равны соответственно 13 см и 12 см.

17.21. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = \alpha$, $AC = d$. Через прямую BD и точку C_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найдите объём призмы.

17.22. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Плоскость A_1BC образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите объём призмы.

17.23. Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равны S_1, S_2 и S_3. Найдите объём параллелепипеда.

17.24. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна S. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны S_1 и S_2. Найдите объём параллелепипеда.

17.25. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 20 см, а расстояния между параллельными прямыми, содержащими рёбра призмы, равны 17 см, 25 см и 26 см. Найдите объём призмы.

17.26. Боковое ребро наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8 см, расстояние между прямыми AA_1 и BB_1 – $5\sqrt{3}$ см, между прямыми AA_1 и DD_1 – 4 см, а двугранный угол параллелепипеда при ребре AA_1 равен 60°. Найдите объём параллелепипеда.

17.27. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 призмы равноудалена от вершин треугольника ABC, а угол между ребром AA_1 и плоскостью основания равен α. Найдите объём призмы.

17.28. Основанием наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро призмы равно $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Вершина A_1 призмы равноудалена от сторон квадрата $ABCD$. Найдите объём призмы.

17.29. Через вершины B, D и C_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания призмы угол 60°. Расстояние от точки C до проведённой плоскости равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите объём призмы.

17.30. Через вершины A, C и B_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания призмы угол 45°. Расстояние от точки B до проведённой плоскости равно $3\sqrt{2}$ см. Найдите объём призмы.

17.31. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 30 см и 40 см. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда и образующая с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём параллелепипеда.

17.32. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, диагонали которого равны 8 см и $4\sqrt{5}$ см. Угол между плоскостью, проходящей через прямые AD и B_1C_1, и плоскостью основания призмы равен 45°. Найдите объём призмы.

17.33. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб, одна из диагоналей которого равна 24 см. Диагональ одной из боковых граней равна $13\sqrt{3}$ см и перпендикулярна плоскости основания. Угол между боковым ребром параллелепипеда и плоскостью основания равен 60°. Найдите объём параллелепипеда.

17.34. Высота наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $6\sqrt{2}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Площадь грани AA_1B_1B равна 36 см^2, грани AA_1C_1C – 48 см^2, а двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 120°. Найдите объём призмы.

17.35. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной 2 см. Боковое ребро призмы равно 5 см и образует с двумя соседними сторонами основания углы по 60°. Найдите объём призмы.

17.36. Основанием наклонного параллелепипеда является квадрат, а каждая его боковая грань – ромб со стороной a и углом 60°. Найдите объём параллелепипеда.

17.37. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной 3 см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является ромбом с диагональю 4 см. Найдите объём призмы.

17.38. Основанием наклонной призмы является квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а площадь каждой из двух других граней равна 36 см^2. Боковые рёбра призмы равны рёбрам основания и образуют с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём призмы.

Упражнения для повторения

17.39. В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $2\sqrt{73}$ см и $4\sqrt{13}$ см. Найдите катеты треугольника.

17.40. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 7{,}5$ см, $AC = 12$ см. Найдите расстояние от вершины B до ортоцентра треугольника ABC.

17.41. Даны векторы $\vec{m}\,(3; -2; p)$ и $\vec{n}\,(-9; 6; -12)$.

1) При каком значении p векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны?

2) При каком значении p вектор $\vec{m}$ будет перпендикулярен оси z?

3) Найдите уравнение плоскости, которая содержит ось z и перпендикулярна вектору $\vec{m}$.

§ 18. Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды

Теорема 18.1

Объём V пирамиды с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Доказательство

Пусть дана пирамида с высотой OM, равной h, и основанием, площадь которого равна S (рис. 18.1). Докажем, что объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh$. Введём систему координат так, чтобы вершина пирамиды O совпала с началом координат, а высота пирамиды OM принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 18.2). Тогда основание пирамиды лежит в плоскости $x = h$. Поэтому проекцией пирамиды на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

Рис. 18.1

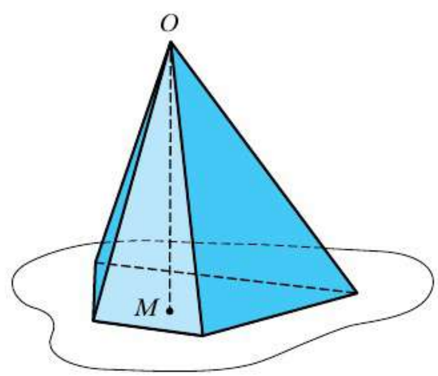
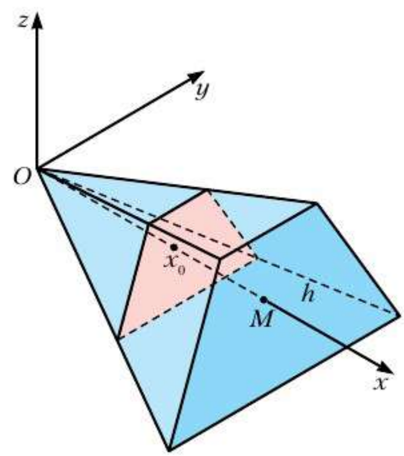


Рис. 18.2



Пусть плоскость $x = x_0$ пересекает пирамиду по многоугольнику с площадью $S(x_0)$. Плоскость этого сечения параллельна плоскости основания пирамиды. Поэтому многоугольник, образованный в сечении, подобен основанию пирамиды. При этом коэффициент подобия равен $\frac{x_0}{h}$. Воспользовавшись теоремой об отношении площадей подобных фигур, получаем пропорцию:

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Отсюда $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$. Теперь можно записать:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$ ◄

Задача 1. Основанием четырёхугольной пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковая грань AMB перпендикулярна плоскости основания. Найдите объём пирамиды, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $MA = MB = 13$ см.

Решение. Проведём высоту MK треугольника AMB (рис. 18.3). Поскольку $AMB \perp ABC$, то $MK \perp ABC$. Следовательно, отрезок MK – высота данной пирамиды.

Так как $MA = MB$, то отрезок MK является медианой треугольника AMB. Отсюда $AK = KB = 5$ см.

В прямоугольном треугольнике MKA получаем: $MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 120 см^2.

Теперь можем найти объём V пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 120 = 480 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: 480 см^3. ◄

Формулу для вычисления объёма пирамиды можно использовать для вычисления объёмов выпуклых многогранников, поскольку произвольный выпуклый многогранник можно разбить на конечное число пирамид. Действительно, выберем внутри такого многогранника произвольную точку и рассмотрим пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а вершинной – выбранная точка. Теперь ясно, что объём выпуклого многогранника можно найти как сумму объёмов пирамид, на которые его можно разбить (рис. 18.4).

Рис. 18.3

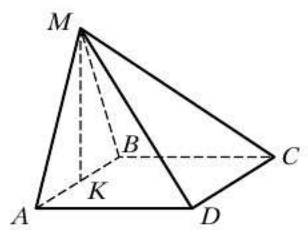
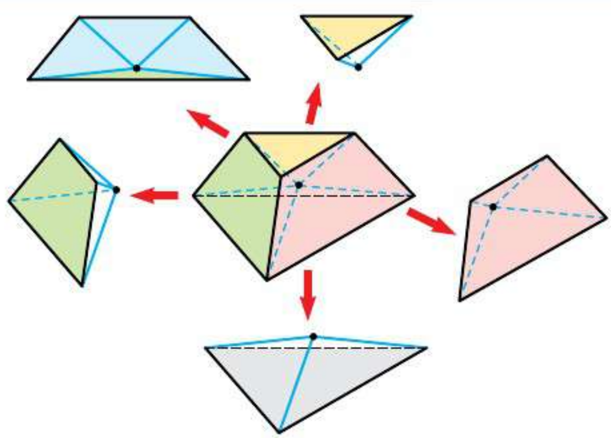


Рис. 18.4



Можно доказать, что на пирамиды можно разбить не только выпуклый, но и невыпуклый многогранник. Поэтому объём произвольного многогранника можно найти как сумму объёмов пирамид, на которые он разбивается.

Задача 2. На рисунке 18.5 изображён многогранник, все рёбра которого равны a. Найдите объём этого многогранника*.

Решение. Разобьём данный многогранник на две равные правильные четырёхугольные пирамиды $EABCD$ и $FABCD$ (рис. 18.6). Поскольку все рёбра пирамиды $EABCD$ равны a, то несложно установить, что площадь основания этой пирамиды равна $S = a^2$, а высота $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (сделайте это самостоятельно). Поэтому объём пирамиды $EABCD$ равен

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Поскольку данный многогранник состоит из двух таких пирамид, то его объём равен

$$V = 2V_{\text{пирамиды}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. ◄

На рисунке 18.7 изображена усечённая пирамида с высотой, равной h, и основаниями, площади которых равны S_1 и S_2. Используя форму-

Рис. 18.5

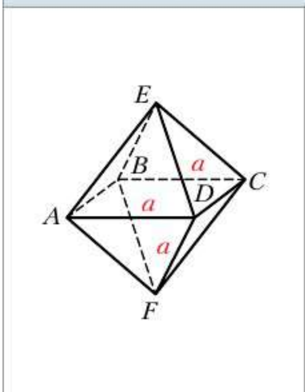


Рис. 18.6

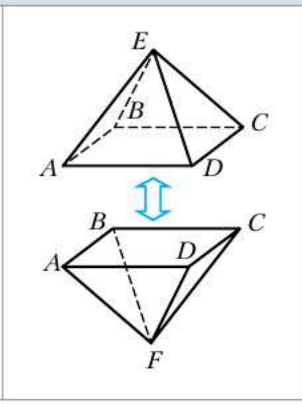
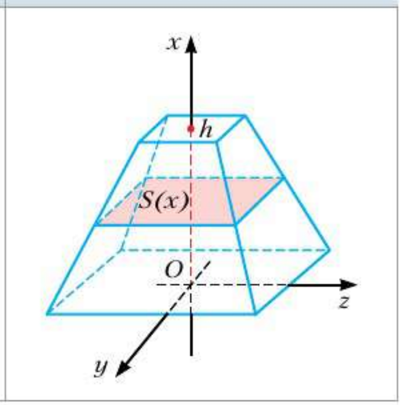


Рис. 18.7



* Многогранник на рисунке 18.5 называют правильным октаэдром. См. в рубрике «Когда сделаны уроки» «Платоновы тела» (учебник «Геометрия. 10 класс»).

лу $V = \int_0^h S(x)dx$, можно показать, что ***объём V усечённой пирамиды с высотой, равной h, и основаниями, площади которых равны S_1 и S_2, вычисляют по формуле***

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$$

1. По какой формуле вычисляют объём пирамиды?
2. По какой формуле вычисляют объём усечённой пирамиды?

Упражнения

18.1. Найдите объём пирамиды:
1) основанием которой является квадрат со стороной 2 см, а высота пирамиды равна 2 см;
2) основанием которой является ромб с диагоналями 2 см и 3 см, а высота пирамиды равна 10 см;
3) основанием которой является треугольник со сторонами 6 см и 9 см и углом 30° между ними, а высота пирамиды равна 12 см.

18.2. Найдите высоту пирамиды, объём которой равен 20 см^3, а площадь основания – 15 см^2.

18.3. Основанием пирамиды является прямоугольник, стороны которого относятся как 2 : 3, высота пирамиды равна 5 см, а объём – 90 см^3. Найдите периметр основания пирамиды.

18.4. Как изменится объём пирамиды, если каждую сторону её основания увеличить в 3 раза, а высоту – в 4 раза?

18.5. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 5 см, а боковое ребро – 13 см. Найдите объём пирамиды.

18.6. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а боковое ребро – b. Найдите объём пирамиды.

18.7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен 60°. Найдите объём пирамиды.

18.8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём пирамиды.

18.9. Объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, изображённой на рисунке 18.8, равен V. Точка D – середина ребра AA_1. Найдите объём пирамиды $DABC$.

18.10. Деревянный куб, ребро которого равно 12 см, распилили на две части: треугольную пирамиду и семигранник (рис. 18.9). Найдите объём семигранника, если плоскость распила проходит через середины трёх рёбер куба, имеющих общую вершину.

Рис. 18.8

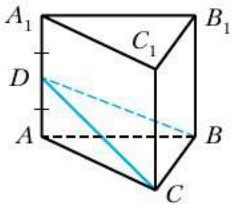
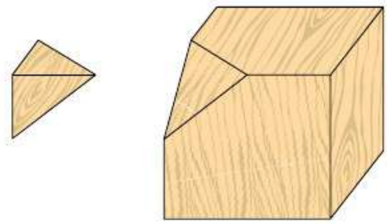


Рис. 18.9



18.11. Основаниями усечённой пирамиды, высота которой равна 6 см, являются прямоугольники. Стороны одного основания равны 12 см и 16 см, а меньшая сторона другого – 3 см. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.12. Найдите объём правильной треугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 5 см и 10 см, а высота – 9 см.

18.13. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b и образует с высотой пирамиды угол α.

18.14. Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого равно a.

18.15. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b и образует с плоскостью основания угол α.

18.16. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, а плоский угол при вершине пирамиды равен β. Найдите объём пирамиды.

18.17. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b и образует со стороной основания угол α. Найдите объём пирамиды.

18.18. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см и 6 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите объём пирамиды.

18.19. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 24 см и 18 см, а каждое её боковое ребро равно 25 см. Найдите объём пирамиды.

18.20. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите объём пирамиды.

18.21. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна b. Угол между боковыми сторонами основания пирамиды равен β. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью её основания угол α. Найдите объём пирамиды.

18.22. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и углом α. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите объём пирамиды.

18.23. Основанием пирамиды является трапеция, параллельные стороны которой равны 4 см и 10 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 45°, а объём пирамиды равен $\frac{280}{3}$ см^3. Найдите высоту пирамиды.

18.24. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 6 см, 25 см и 29 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 60°. Найдите объём пирамиды.

18.25. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья наклонена к нему под углом 60°. Найдите объём пирамиды.

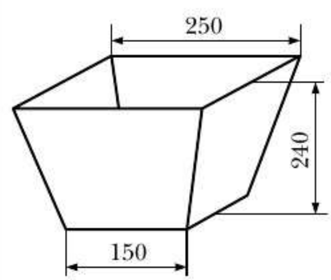
18.26. Прямоугольник $ABCD$ – основание пирамиды $MABCD$. Грани ABM и CBM перпендикулярны основанию пирамиды, грань ADM образует с основанием угол 60°, грань CDM – угол 30°. Высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите объём пирамиды.

18.27. Грани DAB и DAC пирамиды $DABC$ перпендикулярны основанию, а грань DBC наклонена к основанию под углом β. Найдите объём пирамиды, если $AB = BC = m$, $\angle BAC = \alpha$.

18.28. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны a и b, $a > b$. Двугранный угол пирамиды при ребре большего основания равен α. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.29. На рисунке 18.10 изображён бункер для зерна, имеющий форму правильной четырёхугольной усечённой пирамиды (размеры на рисунке даны в сантиметрах). Сколько тонн зерна можно засыпать в такой бункер, если масса 1 м^3 зерна составляет 800 кг?

Рис. 18.10



18.30. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны a и b, $a > b$. Угол между боковым ребром пирамиды и большим основанием равен α. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.31. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 12 см, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен 60°. Высота пирамиды разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите объём усечённой пирамиды, заключённой между этими плоскостями.

18.32. Высота пирамиды равна 27 см. Плоскость, проходящая параллельно основанию этой пирамиды, отсекает от неё усечённую пирамиду, площади оснований которой равны 32 см^2 и 162 см^2. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.33. Докажите, что если в многогранник, площадь поверхности которого равна S, вписан шар радиусом r, то объём V этого многогранника можно найти по формуле $V = \frac{1}{3}Sr$.

18.34. Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно a. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

18.35. Основанием пирамиды является квадрат со стороной 5 см. Одно из боковых рёбер пирамиды, равное 12 см, является высотой пирамиды. Найдите радиус шара, вписанного в данную пирамиду.

18.36. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно d, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите объём пирамиды.

18.37. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а двугранный угол пирамиды при её боковом ребре равен α. Найдите объём пирамиды.

18.38. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, а двугранный угол пирамиды при её боковом ребре равен α. Найдите объём пирамиды.

18.39. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании. Боковая грань пирамиды, содержащая основание равнобедренного треугольника, перпендикулярна плоскости этого треугольника, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.

18.40. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Боковая грань пирамиды, содержащая бóльшую сторону основания, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.

18.41. Основания усечённой пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузами a и b, $a > b$. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты оснований, перпендикулярны основаниям, а третья боковая грань образует с бóльшим основанием угол β. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.42. Основания усечённой пирамиды — квадраты со сторонами a и b, $a > b$. Одна из боковых граней пирамиды является равнобокой трапецией и перпендикулярна основаниям, а противолежащая ей грань образует с бóльшим основанием угол α. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.43. Основания усечённой пирамиды — правильные треугольники со сторонами a и b, $a > b$. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основаниям, а две другие образуют с бóльшим основанием угол α. Найдите объём усечённой пирамиды.

Упражнения для повторения

18.44. Высоты параллелограмма равны 8 см и 12 см, а угол между ними — 60°. Найдите площадь параллелограмма.

18.45. Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 9 см и 15 см, а бóльшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

18.46. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной каждому из векторов $\vec{a}\,(-4; 6; 5)$ и $\vec{b}\,(-2; 4; 3)$.

§ 19. Объёмы тел вращения

В этом параграфе вы продолжите изучение объёмов тел и ознакомитесь с формулами для вычисления объёмов тел вращения: конуса, цилиндра, шара и т. д. Как и при изучении объёмов многогранников, будем пользоваться формулой

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (*)$$

Опираясь на формулу (∗), вычислим объём конуса.

Рассмотрим конус с высотой, равной h, и основанием, радиус которого равен r.

Введём систему координат так, чтобы вершина конуса совпадала с началом координат, а высота конуса принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 19.1). Тогда проекцией конуса на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

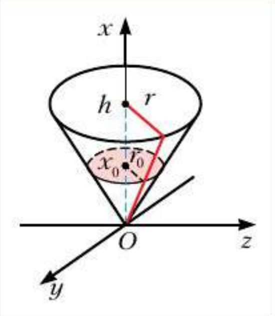
Сечением конуса плоскостью $x = x_0$ будет круг радиусом r_0 (см. рис. 19.1) Поскольку плоскость сечения параллельна плоскости основания конуса, то

$$\frac{x_0}{h} = \frac{r_0}{r}.$$

Получаем: $r_0 = \frac{rx_0}{h}$. Поэтому площадь сечения равна

$$S(x_0) = \pi r_0^2 = \frac{\pi r^2 x_0^2}{h^2}.$$

Рис. 19.1



Воспользовавшись формулой (∗), запишем:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Таким образом, ***объём конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r вычисляют по формуле***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Заметим, что $\pi r^2 = S$, где S – площадь основания конуса. Поэтому ***объём конуса с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Обратите внимание, что полученная формула для вычисления объёма конуса совпадает с формулой для вычисления объёма пирамиды.

Рассуждая аналогично, с помощью формулы (∗) можно установить, что: ***объём усечённого конуса можно вычислить по формулам***

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right);}$$

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),}$$

где h — длина высоты усечённого конуса, r_1 и r_2 — радиусы оснований усечённого конуса, S_1 и S_2 — площади оснований усечённого конуса;

объём цилиндра можно вычислить по формулам

$$V = \pi r^2 h;$$

$$V = Sh,$$

где h — длина высоты цилиндра, r — радиус основания цилиндра, S — площадь основания цилиндра;

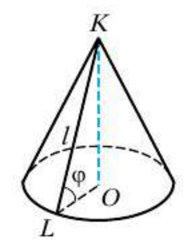
объём шара можно вычислить по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где r — радиус шара.

<u>Задача.</u> Найдите объём конуса, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ.

Рис. 19.2



Решение. На рисунке 19.2 изображён конус, образующая KL которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Пусть O – центр основания конуса. Из прямоугольного треугольника KLO найдём радиус основания r и высоту конуса h. Имеем:

$$r = l\cos\varphi,$$
$$h = l\sin\varphi.$$

Используя формулу $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, находим объём конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi$. ◄

1. По какой формуле вычисляют объём конуса?
2. По какой формуле вычисляют объём усечённого конуса?
3. По какой формуле вычисляют объём цилиндра?
4. По какой формуле вычисляют объём шара?

Упражнения

19.1. Найдите объём цилиндра, радиус основания которого равен 4 см, а высота — 5 см.

19.2. Найдите высоту цилиндра, объём которого равен 98π см^3, а радиус основания — 7 см.

19.3. Найдите радиус основания цилиндра, объём которого равен 252π см^3, а высота — 7 см.

19.4. Найдите объём тела, полученного в результате вращения прямоугольника со сторонами a и b вокруг прямой, содержащей его сторону, равную b.

19.5. Высота цилиндра равна H, а осевое сечение цилиндра является квадратом. Найдите объём цилиндра.

19.6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 20 см и образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объём цилиндра.

19.7. В цилиндрический сосуд, наполненный водой, погрузили металлическую деталь. При этом деталь оказалась полностью покрытой водой. Уровень воды в сосуде поднялся на 14 см, не достигнув края сосуда. Найдите объём детали, если внутренний диаметр сосуда равен 20 см.

19.8. Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 6 см, а высота — 5 см.

19.9. Найдите высоту конуса, объём которого равен 24π см^3, а радиус основания — 3 см.

19.10. Объём конуса равен 50π см^3, а его высота — 6 см. Найдите радиус основания конуса.

19.11. Куча щебня имеет форму конуса, радиус основания которого 2,1 м, а образующая — 3,5 м. Сколько тонн составляет масса щебня, собранного в эту кучу, если масса 1 м^3 щебня равна 3 т? Ответ округлите до единиц.

19.12. Осевое сечение конуса является равносторонним треугольником, а радиус основания конуса равен R. Найдите объём конуса.

19.13. Найдите объём конуса, высота которого равна 4 см, а угол между образующей и плоскостью основания равен $30°$.

19.14. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из углов — $60°$. Найдите объём тела, полученного в результате вращения данного треугольника вокруг прямой, содержащей катет, прилежащий к данному углу.

19.15. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а один из катетов — 5 см. Найдите объём тела, полученного в результате вращения этого треугольника вокруг прямой, содержащей данный катет.

19.16. Найдите объём усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 8 см и 14 см, а угол между его образующей и плоскостью большего основания равен 45°.

19.17. Найдите объём усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 1 см и 3 см, а образующая равна $2\sqrt{5}$ см.

19.18. Найдите объём шара, радиус которого равен 3 см.

19.19. Докажите, что объёмы двух шаров относятся как кубы их радиусов.

19.20. Во сколько раз надо увеличить радиус шара, чтобы его объём увеличился в 5 раз?

19.21. Объёмы двух шаров относятся как 8 : 125. Найдите отношение их радиусов.

19.22. Найдите объём шара, описанного около куба, ребро которого равно a.

19.23. Найдите объём шара, вписанного в куб, ребро которого равно a.

19.24. Алюминиевый провод диаметром 10 мм имеет массу 16,3 кг. Плотность алюминия равна 2600 кг/м^3. Сколько метров составляет длина провода? Ответ округлите до единиц.

19.25. Свинцовая труба, толщина стенки которой равна 4 мм, имеет внутренний диаметр 32 мм. Плотность свинца равна 11 400 кг/м^3. Сколько килограммов составляет масса трубы, если её длина равна 15 м? Ответ округлите до единиц.

19.26. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, стягивающая дугу, градусная мера которой равна α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём цилиндра, если его образующая равна m.

19.27. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом 90°, а из центра верхнего основания — под углом 60°. Найдите объём цилиндра, если радиус его основания равен R.

19.28. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, расстояние от плоскости которого до оси цилиндра равно 12 см. Диагональ сечения равна $10\sqrt{5}$ см, а радиус основания цилиндра — 13 см. Найдите объём цилиндра.

19.29. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу, градусная мера которой равна α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол β и удалена от неё на расстояние, равное d. Найдите объём цилиндра.

19.30. Угол в осевом сечении конуса при его вершине равен α, а расстояние от центра основания конуса до образующей равна m. Найдите объём конуса.

19.31. В основании конуса хорда, равная a, стягивает дугу, градусная мера которой равна α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен β. Найдите объём конуса.

19.32. Хорда основания конуса стягивает дугу, градусная мера которой равна 60°. Отрезок, соединяющий вершину конуса с серединой данной хорды, образует с плоскостью основания конуса угол 60°. Высота конуса равна $\sqrt{3}$ см. Найдите объём конуса.

19.33. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и плоскостью основания конуса равен β. Найдите объём конуса, если его образующая равна b.

19.34. Через две образующие конуса проведена плоскость, пересекающая его основания по хорде, которую видно из центра основания конуса под углом α. Угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания конуса равен β. Найдите объём конуса, если радиус его основания равен R.

19.35. Найдите объём тела, полученного в результате вращения треугольника со сторонами 10 см, 17 см и 21 см вокруг прямой, содержащей его бо́льшую сторону.

19.36. Равнобокую трапецию с основаниями 1 см и 25 см вращают вокруг прямой, содержащей её большее основание. Найдите объём образовавшегося тела, если известно, что в данную трапецию можно вписать окружность.

19.37. Найдите объём тела, полученного в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей гипотенузу этого треугольника, если известны его катет a и прилежащий к этому катету угол β.

19.38. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор, градусная мера дуги которого составляет 120°. Найдите объём конуса, если площадь его боковой поверхности равна 9π см^2.

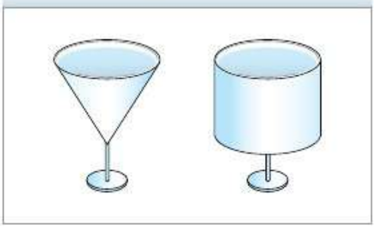
19.39. Развёрткой боковой поверхности конуса является полукруг, радиус которого равен 8 см. Найдите объём конуса.

19.40. В конус вписан шар, радиус которого равен 3 см. Найдите объём конуса, если радиус его основания равен 6 см.

19.41. В конус вписан шар, радиус которого равен r. Найдите объём конуса, если угол между его образующей и плоскостью основания равен α.

19.42. Из сосуда, имеющего форму конуса, высота которого равна 8 см, а диаметр основания — 12 см, и наполненного до краёв водой, перелили воду в сосуд, имеющий форму цилиндра (рис. 19.3).

Рис. 19.3



Диаметр основания цилиндра равен 8 см. Какой наименьшей должна быть высота цилиндрического сосуда, чтобы вода из него не выливалась?

19.43. Стог сена имеет форму цилиндра с конической верхушкой. Радиус его основания равен 2,5 м, высота всего стога – 4 м, а высота его цилиндрической части – 2,2 м. Плотность сена равна 30 кг/м^3. Сколько тонн составляет масса стога? Ответ округлите до десятых.

19.44. Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, $R > r$. Найдите отношение объёма данного усечённого конуса к объёму конуса, частью которого он является.

19.45. Радиусы оснований усечённого конуса равны 4 см и 6 см. Образующую усечённого конуса видно из точки пересечения диагоналей его осевого сечения, проходящего через эту образующую, под углом 60°. Найдите объём усечённого конуса.

19.46. Радиус одного из оснований усечённого конуса в 4 раза больше радиуса другого основания. Высота усечённого конуса равна 8 см, а диагональ его осевого сечения – 17 см. Найдите объём усечённого конуса.

19.47. Ромб со стороной 6 см и углом 60° вращается вокруг прямой, проходящей через вершину острого угла ромба перпендикулярно его стороне. Найдите объём образовавшегося тела.

19.48. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона – 10 см. Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла при его основании перпендикулярно к этому основанию. Найдите объём образовавшегося тела.

19.49. Металлический шар радиусом 15 см расплавили и из полученного металла отлили несколько шаров, радиусы которых равны 3 см. Сколько отлили таких шаров? Потерями металла при переплавке пренебречь.

19.50. Три металлических шара, радиусы которых равны 3 см, 4 см и 5 см, расплавили и из полученного металла отлили один шар. Каков радиус полученного шара? Потерями металла при переплавке пренебречь.

19.51. Радиус основания конуса равен 6 см, а его образующая – 10 см. Найдите объём шара, вписанного в данный конус.

19.52. Найдите объём шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна $2\sqrt{3}$ см.

19.53. Высота конуса равна H, а его осевое сечение является правильным треугольником. Найдите объём шара, описанного около данного конуса.

19.54. Образующая конуса равна a, а угол между нею и плоскостью основания равен α. Найдите объём шара, описанного около данного конуса.

19.55. Объём правильной треугольной призмы равен V. Найдите объём цилиндра, вписанного в данную призму.

19.56. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, параллельные стороны которой равны 2 см и 8 см. Диагональ призмы равна $3\sqrt{10}$ см. Найдите объём цилиндра, вписанного в данную призму.

19.57. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём конуса, описанного около данной пирамиды.

19.58. Одна из сторон основания треугольной пирамиды равна 12 см, а противолежащий ей угол основания — 60°. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объём конуса, описанного около данной пирамиды.

19.59. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и углом α. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду, если угол между его образующей и плоскостью основания пирамиды равен β.

19.60. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, а двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 60°. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.

19.61. Образующая усечённого конуса равна a, а угол между нею и плоскостью большего основания равен α. Найдите объём усечённого конуса, если диагонали его осевого сечения перпендикулярны.

19.62. В усечённый конус вписан шар, радиус которого равен r. Диаметр большего основания усечённого конуса виден из центра вписанного шара под углом α. Найдите объём усечённого конуса.

19.63. Найдите объём шара, вписанного в правильный тетраэдр, ребро которого равно a.

19.64. Боковое ребро правильной пирамиды равно a и образует с её основанием угол α. Найдите объём шара, описанного около данной пирамиды.

Упражнения для повторения

19.65. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Через середину отрезка BO проведена прямая, параллельная диагонали AC. Найдите отношение площадей фигур, на которые эта прямая разбивает квадрат $ABCD$.

19.66. Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом a, касается одного из катетов и проходит через вершину противолежащего ему острого угла. Найдите радиус этой окружности.

19.67. Медианы грани ABC тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке O. На ребре CD отмечена точка M так, что $CM : MD = 3 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

§ 20. Площадь сферы

Изучая такие круглые тела, как цилиндр и конус, вы узнали, что поверхность этих тел можно развернуть на плоскость (см. рис. 7.12, 9.6). Площадями поверхностей (площадями полных поверхностей) цилиндра и конуса называют площади их развёрток.

В отличие от цилиндра и конуса, сферу (поверхность шара) нельзя развернуть на плоскость. Поэтому площадь сферы определяют другим способом.

Рассмотрим шар с центром в точке O радиусом r (рис. 20.1). Представим, что на этот шар нанесли тонкий однородный слой краски (рис. 20.2). Обозначим площадь сферы через $S_{\text{сферы}}$, толщину слоя краски – h, а объём краски – V_h. Краска будет образовывать так называемую *атмосферу* шара толщиной h. Ясно, что атмосфера шара толщиной h состоит из всех точек шара с центром в точке O и радиуса $r + h$, не принадлежащих данному шару.

Рис. 20.1

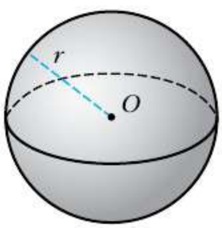


Рис. 20.2

Поскольку краска нанесена на шар однородным тонким слоем, то естественно считать, что

$$V_h \approx S_{\text{сферы}} h$$

или

$$S_{\text{сферы}} \approx \frac{V_h}{h}.$$

Ясно, что чем тоньше слой краски, тем точнее записанное приближённое равенство.

На основе этого равенства введём определение площади поверхности шара.

Определение

Площадью поверхности шара называют предел отношения $\frac{V_h}{h}$ при h, стремящемся к нулю, где V_h — объём атмосферы шара толщиной h.

Теорема 20.1

Площадь поверхности шара радиусом r равна

$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2}$$

Доказательство

Рассмотрим шар радиусом r (см. рис. 20.1). Найдём объём V_h атмосферы шара толщиной h (см. рис. 20.2). Имеем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right).$$

Применяя формулу разности кубов двух выражений, получаем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi h\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right).$$

Далее запишем:

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2. ◄$$

1. Что называют площадью поверхности шара?
2. По какой формуле вычисляют площадь сферы?

Упражнения

20.1. Радиус сферы равен 5 см. Чему равна её площадь?

20.2. Найдите площадь сферы, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

20.3. Найдите радиус сферы, площадь которой равна 256π см^2.

20.4. Радиус шара увеличили в 7 раз. Как при этом изменилась площадь его поверхности?

20.5. Как надо изменить радиус шара, чтобы площадь его поверхности уменьшилась в 3 раза?

20.6. Объёмы двух шаров относятся как 27 : 125. Как относятся площади их поверхностей?

20.7. Площадь большого круга шара равна S. Найдите площадь поверхности данного шара.

20.8. Плоскость, удалённая от центра сферы на 7 см, пересекает сферу по линии, длина которой равна 6π см. Найдите площадь сферы.

20.9. Площадь сечения шара плоскостью, удалённой от его центра на 4 см, равна 24π см^2. Найдите площадь поверхности шара.

20.10. Сколько метров ткани шириной 1 м необходимо для изготовления воздушного шара, радиус которого равен 2 м, если на соединения и отходы идёт 10 % ткани? Ответ округлите до десятых.

20.11. В каком случае расходуется больше материала: на никелировку одного шара диаметром 6 см или на никелировку восьми шаров диаметром 1 см каждый?

20.12. Площади двух параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны 400π см^2 и 49π см^2. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между плоскостями сечений равно 9 см.

20.13. Два сечения шара имеют только одну общую точку, а их плоскости перпендикулярны. Радиус одного сечения равен 5 см, а радиус другого — 12 см. Найдите площадь поверхности шара.

20.14. Площади двух параллельных сечений шара, расположенных по разные стороны от его центра, равны 9π см^2 и 25π см^2. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между плоскостями сечений равно 8 см.

20.15. Найдите отношение площади сферы, вписанной в куб, к площади сферы, описанной около данного куба.

20.16. Найдите площадь сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 3 см и 6 см.

20.17. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Площадь полной поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь сферы, описанной около данного цилиндра.

20.18. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите отношение площади сферы, вписанной в данный конус, к площади сферы, описанной около него.

20.19. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника являются диаметрами трёх шаров. Найдите площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

20.20. Один из углов треугольника равен $120°$. Стороны треугольника являются диаметрами трёх шаров. Найдите площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

20.21. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью её основания угол β. Найдите площадь поверхности шара, описанного около данной пирамиды.

20.22. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в данную пирамиду.

Упражнения для повторения

20.23. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Угол A в 3 раза больше угла C, а угол B в 5 раз меньше угла A. Найдите угол D.

20.24. Отрезок BM – медиана треугольника ABC. Известно, что $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Найдите сторону AB.

20.25. Модуль вектора $\vec{a}\,(2; m + 1; m + 5)$ равен $2\sqrt{3}$. Коллинеарен ли вектор $\vec{a}$ вектору $\vec{b}\,(-1; m + 4; m + 2)$?

Когда сделаны уроки

Определение Минковского

Изучая стереометрию, вы, возможно, заметили, что в учебнике присутствуют два различных подхода к понятию площади поверхности тела. Так, площади поверхностей цилиндра и конуса определены как площади их развёрток на плоскость. Аналогичным образом, по сути дела, определена и площадь поверхности произвольного многогранника. Действительно, если поверхность многогранника разрезать по всем рёбрам и образовавшиеся при этом многоугольники (грани многогранника) разложить на плоскости без пересечений, то получится развёртка многогранника на плоскость. Ясно, что площадь поверхности многогранника равна площади его развёртки.

К сожалению, идея развёртки непригодна в общем случае. Например, сферу нельзя развернуть на плоскость. Поэтому площадь сферы определена иначе. Оказывается, определение площади сферы можно развить и обобщить для произвольных поверхностей в пространстве.

Напомним, что при определении площади сферы рассматривалась атмосфера – множество точек, находящихся вне сферы и удалённых от неё на расстояние, не превосходящее h. В случае произвольной поверхности используют так называемый окутывающий слой.

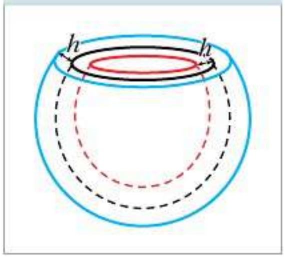
Определение

Окутывающим слоем толщиной h поверхности Ф называют множество точек, отстоящих от поверхности Ф на расстояние, не большее чем h.

Точки окутывающего слоя, в отличие от атмосферы, расположены с обеих сторон поверхности. Такой подход позволяет не беспокоиться о том, с какой стороны поверхности расположены точки окутывающего слоя.

Например, окутывающим слоем толщиной h сферы радиусом r, где $h < r$, с центром в точке O будет множество точек шара радиусом $r + h$ с центром в точке O, не лежащих внутри шара радиусом $r - h$ с тем же центром (рис. 20.3).

Рис. 20.3



Обозначим $S_Ф$ – площадь поверхности Ф, V_h – объём окутывающего слоя толщиной h поверхности Ф. Поскольку точки окутывающего слоя расположены с обеих сторон поверхности Ф, то имеет место приближённое равенство

$$S_Ф \approx \frac{V_h}{2h}.$$

Ясно, что чем меньше величина h, тем точнее записанное приближённое равенство.

На основе этого равенства введём определение площади поверхности.

Определение

Площадью поверхности Ф называют предел отношения $\frac{V_h}{2h}$ при h, стремящемся к нулю, где V_h — объём окутывающего слоя толщиной h этой поверхности, т. е.

$$S_Ф = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Это определение предложил Герман Минковский – один из выдающихся математиков своего времени.

Покажем, что определение Минковского согласуется с ранее введённым определением площади сферы.

Действительно, рассмотрим сферу радиусом r и её окутывающий слой толщиной h. Тогда объём V_h этого окутывающего слоя будет равен разности объёмов шаров радиусами $r + h$ и $r - h$. Имеем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3 = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - (r-h)^3\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(6r^2h + 2h^3\right) = \frac{8}{3}\pi h\left(3r^2 + h^2\right).$$

Герман Минковский (1864–1909)

Родился в Алексотах (ныне Каунасский район, Литва). Преподавал в Боннском, Кёнигсбергском, Цюрихском, Гёттингенском университетах. Основные труды — в области геометрии, теории чисел и математической физики. Был одним из основоположников современной геометрической теории чисел. В 1896 г. установил некоторые важные свойства многомерных выпуклых многогранников и тем самым положил начало важному разделу геометрии — теории выпуклых тел.

Поэтому согласно определению Минковского площадь сферы равна

$$S_{\Phi} = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \cdot \frac{8}{3} \pi h \left(3r^2 + h^2\right) = \lim_{h \to 0} \frac{4}{3} \pi \left(3r^2 + h^2\right) = 4\pi r^2,$$

что совпадает с полученной ранее формулой площади сферы.

Рассматривая окутывающие слои поверхностей известных вам тел, например цилиндра, конуса, многогранников, вы самостоятельно можете проверить, что определение Минковского согласуется также с определениями площадей поверхностей этих тел.

Найдём, пользуясь определением Минковского, площадь поверхности тела, по форме напоминающего бублик или спасательный круг (рис. 20.4). В геометрии это тело называют *тором*. Это тело получается в результате вращения круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга и его не пересекающей (рис. 20.5). При таком вращении центр круга описывает окружность, называемую *осевой окружностью тора* (красная линия на рисунке 20.5).

Используя формулу для вычисления объёма тела вращения, изученную в курсе алгебры 11 класса, можно доказать, что объём тора вычисляется по формуле

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

где r – радиус круга, R – радиус осевой окружности тора (см. рис. 20.5).

Перейдём к вычислению площади поверхности тора. Рассмотрим тор, образованный вращением круга радиусом r, с осевой окружностью ра-

Рис. 20.4

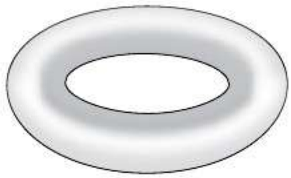


Рис. 20.5

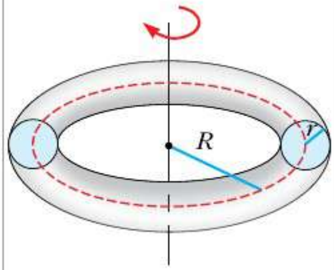
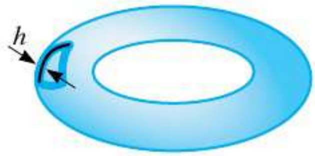


Рис. 20.6



диусом R. Объём V_h его окутывающего слоя толщиной h равен разности объёмов торов, образованных вращением кругов радиусами $r + h$ и $r - h$, с общей осевой окружностью радиусом R (рис. 20.6).

Имеем:

$$V_h = 2\pi^2(r + h)^2 R - 2\pi^2(r - h)^2 R = 2\pi^2 R\big((r + h)^2 - (r - h)^2\big) = 8\pi^2 Rrh.$$

Поэтому площадь поверхности тора равна

$$S_{\text{тора}} = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{8\pi^2 Rrh}{2h} = 4\pi^2 rR.$$

Итоги главы 3

Объём тела

Объёмом тела называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:
1) равные тела имеют равные объёмы;
2) если тело составлено из нескольких других тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел;
3) за единицу измерения объёма тела принимают единичный куб, т. е. куб с ребром, равным единице измерения длины.

Объём призмы

$V = Sh$, **где h — длина высоты призмы, S — площадь основания.**

Объём пирамиды

$V = \frac{1}{3}Sh$, **где h — длина высоты пирамиды, S — площадь основания.**

Объём усечённой пирамиды

$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, **где h — длина высоты усечённой пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований.**

Объём конуса

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, **где h — длина высоты конуса, r — радиус основания.**

Объём усечённого конуса

$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$, **где h — длина высоты конуса, r_1 и r_2 — радиусы оснований;**

$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, **где h — длина высоты конуса, S_1 и S_2 — площади оснований.**

Объём цилиндра

$V = \pi r^2 h$, **где h — длина высоты цилиндра, r — радиус основания;**

$V = Sh$, **где h — длина высоты цилиндра, S — площадь основания.**

Объём шара

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шара.

Площадь сферы

$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$, где r — радиус сферы.

§ 21. Упражнения для повторения курса геометрии 11 класса

1. Координаты и векторы в пространстве

21.1. Даны точки $A\ (7;\ 3;\ -1)$ и $B\ (x;\ 5;\ z)$. Известно, что середина C отрезка AB принадлежит оси ординат.

1) Найдите значения x и z.

2) Найдите координаты точки C.

21.2. Даны точки $A\ (8;\ 0;\ 4)$, $B\ (13;\ 4;\ 7)$, $C\ (11;\ -3;\ 3)$.

1) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

2) Найдите площадь круга, описанного около треугольника ABC.

21.3. Найдите площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если известно, что $A\ (1;\ 1;\ -2)$, $C\ (-3;\ 3;\ 2)$, а точка B принадлежит оси аппликат.

21.4. Даны точки $A\ (-2;\ 1;\ 3)$, $B\ (0;\ 5;\ 9)$ и $C\ (-3;\ y;\ 6)$. При каких значениях y отрезок AB в 2 раза больше отрезка AC?

21.5. Найдите координаты точки, симметричной точке $A\ (3;\ 2;\ 1)$ относительно:

1) оси ординат;

2) начала координат.

21.6. От точки $C\ (2;\ -3;\ 1)$ отложили вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Найдите координаты точки D, если $A\ (-1;\ 0;\ 5)$, $B\ (0;\ 4;\ -1)$.

21.7. Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки A является точка B, а образом точки C – точка D, если:

1) $A\ (-2;\ 3;\ 5)$, $B\ (1;\ 2;\ 4)$, $C\ (4;\ -3;\ 6)$, $D\ (7;\ -2;\ 5)$;

2) $A\ (0;\ 1;\ 2)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (3;\ -2;\ 2)$, $D\ (2;\ -3;\ 1)$?

21.8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $DABC$ равна $3\sqrt{3}$ см, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°. Найдите $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}|$.

21.9. Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{B_1O}$.

21.10. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1A}$.

21.11. Даны точки $A\ (1;\ 0;\ 1)$, $B\ (2;\ 1;\ -1)$ и $C\ (-1;\ 2;\ 0)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

21.12. Векторы $\vec{a}\ (x;\ 3;\ -4)$ и $\vec{b}\,(20;\ -12;\ 16)$ лежат на противоположных сторонах параллелограмма. Найдите значение x.

21.13. Даны точки A (–4; 1; 2), B (–2; 0; –1) и C (1; 1; 0). Найдите координаты точки D, принадлежащей плоскости yz, такой, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

21.14. Точка M – середина ребра B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра CD. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

21.15. Медианы грани BDC тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке O, точка M – середина ребра AD. Выразите вектор $\overrightarrow{MO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

21.16. Точка O – центр основания правильной пирамиды $DABC$. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

21.17. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ (2; 2; 1) и $\vec{b}$ (6; –2; –3).

21.18. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ (3; –2; 4) и $\vec{b}$ (2; 3; 0).

21.19. При каких значениях x векторы $\vec{a}$ (x; –2; 1) и $\vec{b}$ (x; $2x$; 3) перпендикулярны?

21.20. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n}$ (1; –2; 1), если $\vec{m} \cdot \vec{n} = -3$.

21.21. Найдите угол между вектором $\vec{a}$ (–1; 2; 5) и положительным направлением оси абсцисс.

21.22. Найдите угол между вектором $\vec{b}$ (6; –2; –3) и отрицательным направлением оси аппликат.

21.23. Известно, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 135°$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

21.24. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

21.25. Точка M – середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямыми MB_1 и DK.

21.26. Точка O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O_2 – центр грани CC_1D_1D. Найдите угол BO_1O_2.

21.27. Составьте уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной ему, если A (7; –4; 3), B (–1; 0; 1).

21.28. Точка M (1; –4; 2) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость α. Составьте уравнение плоскости α.

21.29. При каком значении a плоскости $3x - 2y + z - 6 = 0$ и $2x - 3y + az + 2 = 0$ перпендикулярны?

21.30. Найдите значения a и b, при которых плоскости $ax - 4y + 5z - 7 = 0$ и $3x + by - 2z + 2 = 0$ параллельны.

21.31. Составьте уравнение плоскости, симметричной плоскости $3x - 5y + z + 6 = 0$ относительно: 1) начала координат; 2) точки M (1; 1; 3).

21.32. Как изменится, увеличится или уменьшится, и во сколько раз площадь боковой поверхности цилиндра, если:
1) радиус его основания увеличить в 3 раза, а высоту — в 4 раза;
2) радиус его основания уменьшить в 2 раза, а высоту увеличить в 6 раз?

21.33. В цилиндре проведено сечение, параллельное его оси и отстоящее от неё на 3 см. Диагональ сечения равна 16 см и образует с плоскостью основания цилиндра угол 60°. Найдите радиус основания цилиндра.

21.34. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь сечения цилиндра, которое параллельно его оси и удалено от неё на расстояние, составляющее: 1) половину радиуса основания; 2) $\frac{4}{5}$ радиуса основания.

21.35. Через образующую цилиндра проведены два сечения, каждое из которых параллельно оси цилиндра и плоскости которых перпендикулярны. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если площадь одного из данных сечений равна 30 см^2, а другого — 40 см^2.

21.36. Через образующую AA_1 цилиндра проведены сечения AA_1B_1B и AA_1C_1C, площади которых равны соответственно 16 см^2 и 21 см^2. Двугранный угол, гранями которого являются полуплоскости AA_1B и AA_1C, равен 60°. Найдите площадь четырёхугольника BB_1C_1C.

21.37. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Диагональ боковой грани, содержащей катет основания, противолежащий углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

21.38. Площадь полной поверхности цилиндра, описанного около куба, равна S. Найдите площадь поверхности куба.

21.39. Основанием прямой призмы является ромб с тупым углом α. Угол между боковым ребром и большей диагональю призмы равен β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму, если её высота равна h.

21.40. Радиус основания и высоту конуса увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличилась площадь боковой поверхности конуса?

21.41. Радиус основания конуса увеличили в 6 раз, а его образующую уменьшили в 3 раза. Как изменилась площадь боковой поверхности конуса, уменьшилась или увеличилась, и во сколько раз?

21.42. Наибольший угол между двумя образующими конуса равен 120°. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 90°, проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде длиной 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

21.43. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу 60°, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь образовавшегося сечения, если радиус основания конуса равен 4 см.

21.44. Радиус большего основания усечённого конуса равен 20 см, высота – $8\sqrt{3}$ см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

21.45. Диагональ осевого сечения усечённого конуса образует с плоскостью его основания угол 30°, а радиусы оснований равны 2 см и 13 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

21.46. Образующая усечённого конуса равна 29 см, высота – 21 см, а радиусы оснований относятся как 5 : 9. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

21.47. Ромб со стороной 1 см и острым углом 60° вращается вокруг прямой, проходящей через вершину острого угла ромба перпендикулярно к его большей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.

21.48. Высота усечённого конуса равна 4 см, а угол между его образующей и плоскостью большего основания составляет 60°. Диагональ осевого сечения усечённого конуса перпендикулярна боковой стороне сечения. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

21.49. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около данной пирамиды.

21.50. Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен 60°, а высота пирамиды – $2\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

21.51. Стороны основания треугольной пирамиды равны 19 см, 20 см и 37 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны 45°. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в данную пирамнду.

21.52. Основанием пирамиды является ромб с диагоналями 40 см и 30 см, высота пирамиды равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в данную пирамиду.

21.53. Найдите координаты центра и радиус сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$. Как расположена точка A (1; 2; 5) относительно данной сферы?

21.54. Составьте уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AB, если A (4; –5; 3) и B (6; 1; 5).

21.55. Прямая a проходит через начало координат и точку A (1; 2; 3). Найдите координаты точек пересечения прямой a и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 56$.

21.56. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 3y + 5z + 2 = 0$ и пересекающей сферу $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = R^2$ по большой окружности.

21.57. Что является геометрическим местом центров сфер, касающихся данной прямой в данной точке?

21.58. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Стороны этого треугольника касаются сферы. Расстояние от центра сферы до плоскости данного треугольника равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите радиус сферы.

21.59. Сфера пересечена плоскостью, отстоящей от её центра на 24 см. Найдите радиус сферы, если длина полученного сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины сечения сферы плоскостью, проходящей через её центр.

21.60. В шар, радиус которого равен 3 см, вписан куб. Найдите расстояние от центра шара до граней куба.

21.61. В шар вписана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Радиус шара, проведённый в вершину A, образует с плоскостью грани AA_1B_1B угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус шара равен 4 см.

21.62. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите радиус шара, описанного около данной пирамиды.

21.63. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра, вписанного в шар, радиус которого равен R.

21.64. Центр шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, делит её высоту в отношении 3 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите двугранный угол пирамиды при её боковом ребре.

21.65. Найдите отношение радиуса шара, вписанного в правильную треугольную призму, к радиусу шара, описанного около этой призмы.

21.66. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра, описанного около шара, радиус которого равен R.

21.67. Радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, равен 3 см, а сторона основания пирамиды — 12 см. Найдите площадь боковой поверхности данной пирамиды.

21.68. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 25 см, 29 см и 36 см, а вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 10 см. Найдите площадь большого круга шара, вписанного в данную пирамиду.

21.69. Высота цилиндра равна диаметру основания. В данный цилиндр вписан шар. В этот шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания конуса. Найдите отношение площади боковой поверхности данного цилиндра к площади боковой поверхности данного конуса.

21.70. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α, высота конуса равна H. Найдите радиус сферы, описанной около данного конуса.

21.71. Радиус основания конуса равен 3 см, а радиус шара, вписанного в данный конус, — $\sqrt{3}$ см. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

21.72. Образующая конуса равна 20 см, а площадь его боковой поверхности — 240π см^2. Найдите радиус сферы, вписанной в данный конус.

21.73. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, образующая которого равна 13 см, если известно, что в него можно вписать шар.

3. Объёмы тел. Площадь сферы

21.74. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 8 см и образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда.

21.75. Сторона AD основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a и образует с диагональю основания угол α. Плоскость, проходящая через прямые AD и B_1C_1, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда.

21.76. Найдите объём куба, диагональ которого равна d.

21.77. Боковые грани правильной шестиугольной призмы являются квадратами, а её бóльшая диагональ равна d. Найдите объём призмы.

21.78. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$ см, угол между плоскостями ABC и AB_1C равен 45°, а расстояние от вершины B до плоскости AB_1C — $3\sqrt{2}$ см. Найдите объём призмы.

21.79. Высота прямой четырёхугольной призмы равна h. Диагонали призмы образуют с плоскостью основания углы α и β, а угол между диагоналями основания равен γ. Найдите объём призмы.

21.80. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 10 см. Две боковые грани призмы перпендикулярны, а их площади равны 50 см^2 и 120 см^2. Найдите объём призмы.

21.81. Основанием наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1 = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Известно, что $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 45^\circ$. Найдите объём призмы.

21.82. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Точки E, F, M и K — середины рёбер AB, BC, CD и AD соответственно. Найдите объём пирамиды B_1EFMK.

21.83. Площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной пирамиды равна S, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $45°$. Найдите объём пирамиды.

21.84. Объём правильного тетраэдра равен V. Чему равен объём тетраэдра, вершинами которого являются центры граней данного тетраэдра?

21.85. Основанием пирамиды является треугольник с углами α и β. Радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен R, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол γ. Найдите объём пирамиды.

21.86. Центр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, принадлежит плоскости основания пирамиды. Найдите объём пирамиды, если радиус шара равен $2\sqrt{3}$ см.

21.87. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см, а двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны $45°$. Найдите объём пирамиды.

21.88. Ромб $ABCD$ является основанием пирамиды $MABCD$. Известно, что $AB = a$, $\angle ABC = \beta$. Грани ABM и CBM перпендикулярны основанию пирамиды, а угол между гранью ADM и основанием равен α.

1) Найдите угол между гранью CDM и основанием пирамиды.

2) Найдите объём пирамиды.

21.89. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. Грань ADC перпендикулярна основанию пирамиды, а грани ABD и CBD образуют с основанием угол β. Расстояние от основания высоты пирамиды до плоскости ABD равно m. Найдите объём пирамиды.

21.90. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны a и b, $a > b$. Двугранный угол пирамиды при ребре большего основания равен α. Найдите объём усечённой пирамиды.

21.91. Найдите отношение объёма цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, к объёму цилиндра, описанного около этой призмы.

21.92. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна α, $0° < \alpha < 180°$. Найдите объём цилиндра, если радиус его основания равен R, а данное сечение является квадратом.

21.93. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор, градусная мера дуги которого равна 120°. Найдите объём конуса, если его высота равна 6 см.

21.94. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите объём конуса, описанного около данной пирамиды.

21.95. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α, а радиус шара, описанного около конуса, – R. Найдите объём конуса.

21.96. Высота и объём усечённого конуса равны высоте и объёму цилиндра. Радиусы оснований усечённого конуса равны 2 см и 11 см. Найдите радиус основания цилиндра.

21.97. Ромб со стороной 4 см и углом 60° вращается вокруг прямой, проходящей через вершину его тупого угла и перпендикулярной меньшей диагонали ромба. Найдите объём образовавшегося тела.

21.98. Объём цилиндра равен 16π см^3. Найдите объём шара, вписанного в данный цилиндр.

21.99. Площадь осевого сечения цилиндра равна S, а угол между диагональю этого сечения и плоскостью основания равен α. Найдите площадь сферы, описанной около данного цилиндра.

§ 22. Упражнения для повторения курса планиметрии

1. Треугольники

22.1. Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого на 7 см больше одного из катетов, а другой катет равен 21 см.

22.2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а медиана, проведённая к гипотенузе, – 8,5 см. Вычислите площадь данного треугольника.

22.3. Высота равнобедренного треугольника делит его боковую сторону на отрезки длиной 1 см и 12 см, считая от вершины угла при основании. Найдите основание данного треугольника.

22.4. Высота AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки BD и CD так, что $BD = 15$ см, $CD = 5$ см. Найдите сторону AC, если $\angle B = 30^\circ$.

22.5. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой, если одна из наклонных на 2 см больше другой.

22.6. Найдите площадь треугольника ABC, изображённого на рисунке 22.1.

22.7. Высота равнобедренного тупоугольного треугольника, проведённая к его основанию, равна 8 см, а радиус описанной около него окружности — 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

22.8. Высота прямоугольного треугольника с острым углом α, проведённая к гипотенузе, равна h. Найдите гипотенузу этого треугольника.

22.9. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки 8 см и 12 см. Найдите периметр треугольника.

22.10. Периметр равнобедренного треугольника равен 100 см, а высота, опущенная на основание, — 30 см. Найдите площадь треугольника.

22.11. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединный перпендикуляр отрезка AB пересекает его в точке M, а сторону BC — в точке K. Докажите, что $MK = \frac{1}{3}BC$.

22.12. Один из углов прямоугольного треугольника равен 15°. Докажите, что высота треугольника, проведённая к его гипотенузе, в 4 раза меньше гипотенузы.

22.13. В прямоугольном треугольнике MNK на гипотенузу MK опущена высота NF. Площадь треугольника MNF равна 2 см^2, а площадь треугольника KNF — 32 см^2. Найдите гипотенузу треугольника MNK.

22.14. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите сторону AB, если $AO = 18$ см, $BC : AD = 5 : 9$.

22.15. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F, $AB : BF = 3 : 7$, AD — большее основание трапеции. Разность оснований трапеции равна 6 см. Найдите основание AD.

22.16. Угол при вершине первого равнобедренного треугольника равен углу при вершине второго равнобедренного треугольника. Основание и проведённая к нему высота первого треугольника равны соответственно 30 см и 8 см, а боковая сторона второго треугольника — 51 см. Чему равен периметр второго треугольника?

22.17. На стороне BC треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle CAK = \angle ABC$, $BK = 12$ см, $KC = 4$ см. Найдите сторону AC.

22.18. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите отрезок AD, если $AB = 6$ см, $AC = 18$ см.

22.19. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O, $BO : OD = 3 : 4$, $BC = 18$ см. Найдите основание AD трапеции.

22.20. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O, $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ см. Найдите отрезок OD.

22.21. В треугольник ABC вписан ромб $CDEF$ так, как показано на рисунке 22.2. Найдите сторону BC треугольника, если $AC = 15$ см, а сторона ромба равна 10 см.

22.22. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC, точка K – середина стороны AC. Площадь треугольника AMK равна 12 см^2. Чему равна площадь четырёхугольника $BMKC$?

22.23. Точка D – середина стороны AB треугольника ABC, точка E – середина стороны BC. Площадь четырёхугольника $ADEC$ равна 27 см^2. Чему равна площадь треугольника ABC?

22.24. Отрезок CM – медиана треугольника ABC, изображённого на рисунке 22.3, отрезок DE – средняя линия треугольника MBC. Чему равна площадь четырёхугольника $MDEC$, если площадь треугольника ABC равна 48 см^2?

Рис. 22.1

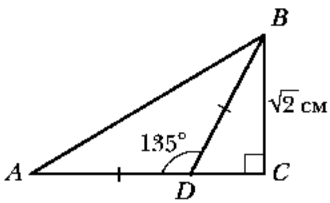


Рис. 22.2

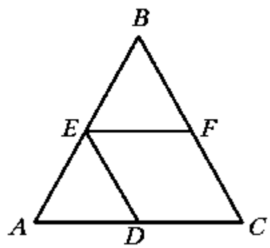
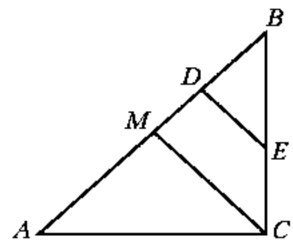


Рис. 22.3



22.25. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC – в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $BM = 3$ см, $AM = 4$ см, а площадь четырёхугольника $AMKC$ равна 80 см^2.

22.26. Площадь треугольника ABC равна 18 см^2. На стороне AB отметили точки K и D так, что $AK = KD = DB$, а на стороне AC – точки F и E так, что $AF = FE = EC$. Найдите площадь четырёхугольника $DEFK$.

22.27. Площадь треугольника ABC равна 24 см^2. На стороне AB отметили точки D и F так, что $AD = BF = \frac{1}{4}AB$, а на стороне BC – точки P и M так, что $CM = BP = \frac{1}{4}BC$. Найдите площадь четырёхугольника $DFPM$.

22.28. Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного треугольника, касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 см и 12 см.

22.29. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 40 см, а высота, проведённая к основанию, — $4\sqrt{91}$ см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис углов при основании треугольника с его боковыми сторонами.

22.30. Основание равнобедренного треугольника равно 40 см, а высота, проведённая к нему, — 15 см. Найдите расстояние между точками касания окружности, вписанной в треугольник, с его боковыми сторонами.

22.31. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 15 см, а высота, проведённая к боковой стороне, — 24 см. Найдите площадь этого треугольника.

22.32. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MC = 3 : 10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

22.33. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 4 : 3$. В каком отношении медиана BK треугольника ABC делит отрезок CM?

22.34. Середина боковой стороны равнобедренного треугольника удалена от его основания на 9 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до его основания.

22.35. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка пересечения медиан удалена от вершины B на 6 см. Найдите расстояние от середины боковой стороны треугольника до его основания.

22.36. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 24$ см, $BC = 20$ см, отрезок AD на 3 см больше отрезка CD. Найдите сторону AC.

22.37. В треугольнике ABC отрезок BK — высота, отрезок AM — биссектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Из точки M опущен перпендикуляр MD на сторону AC. Найдите отрезок MD.

22.38. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), равен 12 см, а расстояние от центра этой окружности до вершины B — 20 см. Найдите периметр данного треугольника.

22.39. Боковая сторона равнобедренного треугольника точкой касания вписанной окружности делится в отношении $8 : 9$, считая от вершины угла при основании треугольника. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

22.40. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. К окружности, вписанной в этот треугольник, проведена касательная, которая параллельна основанию AC и пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вычислите площадь треугольника MBK.

22.41. Две стороны треугольника, угол между которыми равен 60°, относятся как $5 : 8$, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

22.42. Сумма двух сторон треугольника равна 16 см, а угол между ними — $120°$. Найдите меньшую из этих сторон, если третья сторона треугольника равна 14 см.

22.43. Найдите угол A треугольника ABC, если $BC = 7$ см, $AC = 3$ см, $AB = 8$ см.

22.44. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. На стороне AB отметили точку D так, что $AD = 5$ см. Найдите отрезок CD.

22.45. Стороны треугольника равны 12 см, 15 см и 18 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины его наибольшего угла.

22.46. Найдите площадь круга, описанного около треугольника со сторонами 7 см, 8 см и 9 см.

22.47. Стороны треугольника равны 6 см, 25 см и 29 см. Найдите радиус вписанной окружности данного треугольника.

22.48. Одна из сторон треугольника равна 25 см, а другая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длиной 22 см и 8 см, считая от конца первой стороны. Найдите радиус вписанной окружности.

22.49. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOC, где O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, если $\angle ABC = 60°$.

22.50. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отметили точку D так, что $\angle ADB = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD, если $\angle ACB = 45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $8\sqrt{2}$ см.

22.51. Стороны треугольника равны 6 см и 8 см. Медиана треугольника, проведённая к его третьей стороне, равна $\sqrt{46}$ см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

22.52. Стороны треугольника равны 8 см, 9 см и 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его наибольшей стороне.

22.53. Медиана CM треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CM.

22.54. На медиане BD треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MD = 3 : 1$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AMD равна 3 см^2.

22.55. Площадь треугольника ABC равна 40 см^2. На медиане AM отметили точку P такую, что $AP : PM = 2 : 3$. Найдите площадь треугольника BPM.

2. Четырёхугольники. Правильные многоугольники

22.56. Стороны параллелограмма равны 12 см и 20 см, а угол между его высотами, проведенными из вершины тупого угла, — 60°. Найдите площадь параллелограмма.

22.57. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 6 см и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите меньшую диагональ параллелограмма, если его острый угол равен 30°.

22.58. Одна из сторон параллелограмма равна 12 см, бóльшая диагональ — 28 см, а тупой угол — 120°. Найдите периметр параллелограмма.

22.59. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении $3 : 7$, считая от вершины острого угла, равного 45°. Вычислите площадь параллелограмма, если его периметр равен 52 см.

22.60. Биссектриса угла D прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону AB в точке M, $BM = 5$ см, $AD = 3$ см. Найдите периметр прямоугольника.

22.61. Через середину диагонали BD прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD прямоугольника в точках M и K соответственно, $BD = 10$ см, $BM = 6$ см, $MC = 2$ см. Вычислите площадь четырёхугольника $AMCK$.

22.62. Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC и образует с ней угол, равный углу между диагоналями. Найдите этот угол.

22.63. Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Найдите углы, на которые диагональ прямоугольника делит его угол.

22.64. Вычислите площадь ромба, одна из диагоналей которого равна 16 см, а сторона — 10 см.

22.65. Бóльшая диагональ ромба равна c, а тупой угол — α. Найдите периметр ромба.

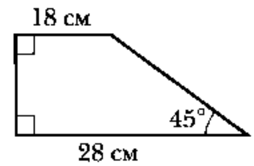
22.66. Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, делит её на два отрезка, один из которых на 5 см больше другого. Найдите периметр ромба, если длина этого перпендикуляра равна 6 см.

22.67. Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, делит её на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите бóльшую диагональ ромба.

22.68. Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 23 см и 17 см, а диагональ — 25 см.

22.69. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 22.4.

Рис. 22.4



22.70. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна a, а один из углов — 60°. Найдите площадь трапеции.

22.71. Бóльшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 16 см, а острый угол — 30°. Найдите площадь этой трапеции, если в неё можно вписать окружность.

22.72. Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равен R, а один из углов трапеции — 45°. Найдите площадь трапеции.

22.73. Основания равнобокой трапеции равны 1 см и 17 см, а диагональ делит её тупой угол пополам. Найдите площадь трапеции.

22.74. Основания равнобокой трапеции равны 15 см и 33 см, а диагональ делит её острый угол пополам. Найдите площадь трапеции.

22.75. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 10 см и 8 см. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно боковой стороне трапеции.

22.76. Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 20 см и 12 см. Бóльшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

22.77. Меньшая диагональ прямоугольной трапеции делит её тупой угол пополам, а другую диагональ делит в отношении 5 : 2, считая от вершины острого угла. Найдите периметр трапеции, если её меньшая боковая сторона равна 12 см.

22.78. Окружность, вписанная в равнобокую трапецию, делит точкой касания боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 18 см. Найдите площадь трапеции.

22.79. Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию, делит точкой касания бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр трапеции.

22.80. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её большее основание на отрезки длиной 20 см и 25 см. Вычислите периметр трапеции.

22.81. Центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит большему основанию, а боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

22.82. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол 30°. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около неё, равен R.

22.83. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

22.84. Боковые стороны и меньшее основание равнобокой трапеции равны 10 см, а один из её углов равен 60°. Найдите радиус окружности, описанной около данной трапеции.

22.85. Основания равнобокой трапеции равны 9 см и 21 см, а диагональ — 17 см. Найдите радиус окружности, описанной около данной трапеции.

22.86. Основания трапеции равны 15 см и 36 см, а боковые стороны — 13 см и 20 см. Найдите площадь данной трапеции.

22.87. Чему равен угол BAD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle ACD = 37°$, $\angle ADB = 43°$?

22.88. Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром его описанной окружности, M — точка пересечения его диагоналей, $\angle ABD = 32°$, $\angle CBD = 64°$. Найдите угол BMC.

22.89. Центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, принадлежит его стороне AD. Найдите углы данного четырёхугольника, если $\angle ACB = 30°$, $\angle CBD = 20°$.

22.90. Найдите диагональ AC четырёхугольника $ABCD$, если около него можно описать окружность и $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

22.91. Как относится сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного треугольника, описанного около этой окружности?

22.92. Как относится сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около этой окружности?

22.93. Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной квадрата, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат по разные стороны от хорды.

22.94. Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной правильного шестиугольника, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат по одну сторону от хорды.

22.107. Вершинами треугольника являются точки A (–3; 1), B (2; –2) и C (– 4; 6). Найдите медиану AM треугольника ABC.

22.108. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, где B (4; 1), C (–1; 1), D (–2; –2). Найдите координаты вершины A.

22.109. Найдите координаты точки, которая принадлежит оси ординат и равноудалена от точек C (3; 2) и D (1; –6).

22.110. Найдите координаты точки, которая принадлежит оси абсцисс и равноудалена от точек A (–1; 5) и B (7; –3).

22.111. Окружность задана уравнением $(x+4)^2+(y-1)^2=12$. Как расположена точка A (–2; 3) относительно этой окружности?

22.112. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок MK, если M (–3; 4), K (5; 10).

22.113. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 4) и B (–3; –2).

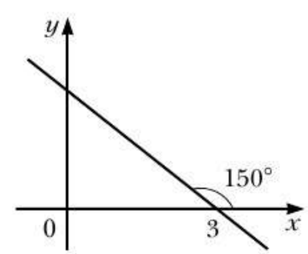
22.114. Отрезок AM – медиана треугольника с вершинами в точках A (–4; –2), B (5; 3) и C (–3; –7). Составьте уравнение прямой AM.

22.115. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $(x-1)^2+(y-6)^2=3$ и $(x+1)^2+y^2=7$.

22.116. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\left(\sqrt{3};\,5\right)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол 60°.

22.117. Составьте уравнение прямой, изображённой на рисунке 22.5.

Рис. 22.5



22.118. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку P (2; –5) и параллельна прямой $y=-0{,}5x+9$.

22.119. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–1; 5), B (4; 6), C (3; 1), D (–2; 0) является ромбом.

22.120. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; –2), B (1; 2), C (–3; 1), D (–2; –3) является прямоугольником.

22.121. Даны точки A (–2; 1) и B (2; –3). Найдите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой AB и пересекает отрезок AB в точке N такой, что $AN : NB = 3 : 1$.

5. Векторы

22.122. Найдите координаты суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 22.6.

22.123. Найдите координаты разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 22.7.

22.124. Даны векторы $\vec{a}\,(3; -1)$ и $\vec{b}\,(1; -2)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

22.125. Известно, что $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Найдите $|\vec{c}|$, если $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(-2; 3)$.

22.126. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

22.127. Даны точки M (4; –2), N (1; 1) и P (3; 3). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$.

22.128. На рисунке 22.8 изображён ромб $ABCD$, в котором $AB = 2$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

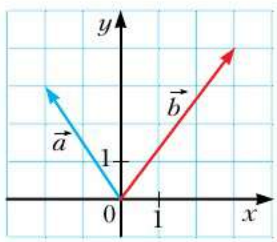


Рис. 22.6

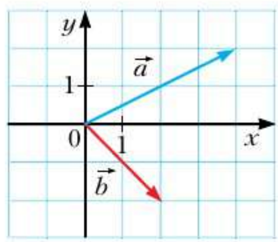


Рис. 22.7

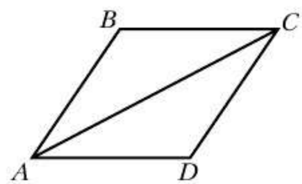


Рис. 22.8

22.129. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Вычислите скалярное произведение: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

22.130. Найдите угол между векторами $\vec{a}\,(-1; -1)$ и $\vec{b}\,(2; 0)$.

22.131. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отметили точку M так, что $CM : MD = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

22.132. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F так, что $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

22.133. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BK : KC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

22.134. На стороне BC и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили точки K и F соответственно так, что $BK : BC = 5 : 6$, $AF : AC = 6 : 7$. Докажите, что точки D, F и K лежат на одной прямой.

22.135. Сколько существует параллельных переносов, при которых образом прямой является: 1) сама эта прямая; 2) параллельная ей прямая?

22.136. Запишите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2 + y^2 = 4$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (2; –3).

22.137. Укажите движение, при котором образом четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 22.9, является четырёхугольник $MNKP$.

22.138. Укажите движение, при котором образом четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 22.10, является четырёхугольник $MKNP$.

Рис. 22.9

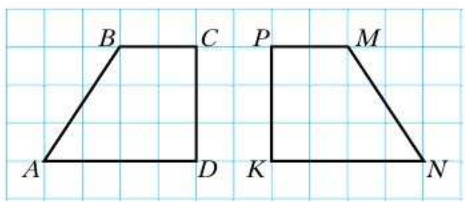
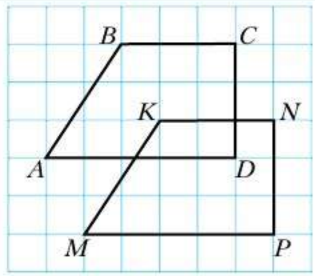


Рис. 22.10



22.139. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ образом точки A (–3; 7) является точка B (2; 3). Какие координаты имеет образ точки C (1; –5) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$?

22.140. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ образом точки A (–5; 6) является точка B (2; –1). Какие координаты имеет прообраз точки D (10; –3) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$?

22.141. Какие координаты имеет образ точки A (–4; 6) при симметрии относительно начала координат?

22.142. Какие координаты имеет точка, симметричная точке A (2; –4) относительно точки M (3; –1)?

22.143. Какие координаты имеет образ точки A (–2; 5) при симметрии относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат?

22.144. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, не являющийся квадратом?

22.145. Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, изображённого на рисунке 22.11. Укажите образ стороны CD при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 120°.

22.146. Точка O – центр правильного восьмиугольника, изображённого на рисунке 22.12. Укажите образ стороны A_3A_4 при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 135°.

22.147. Точка O – центр правильного двенадцатиугольника, изображённого на рисунке 22.13. Укажите образ стороны A_2A_3 при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 150°.

Рис. 22.11

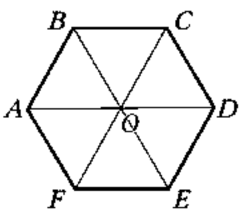


Рис. 22.12

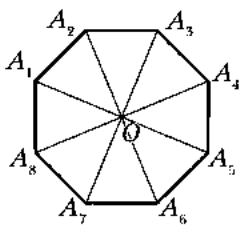
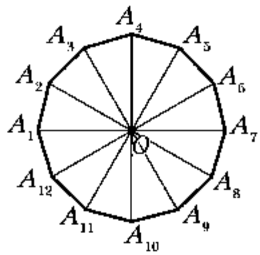


Рис. 22.13



22.148. Квадрат $CDEF$, изображённый на рисунке 22.14, является образом квадрата $ABCD$ при повороте по часовой стрелке на угол 90°. Какая точка является центром поворота?

22.149. Прямоугольник $AMKP$, изображённый на рисунке 22.15, является образом прямоугольника $ABCD$ при повороте против часовой стрелки на угол 90°. Какая точка является центром поворота?

22.150. Медианы треугольника ABC, изображённого на рисунке 22.16, пересекаются в точке M. Найдите коэффициент: 1) гомотетии с центром M, при которой точка C_1 является образом точки C; 2) гомотетии с центром B, при которой точка M является образом точки B_1.

Рис. 22.14

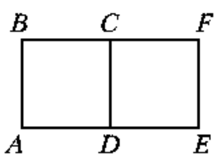


Рис. 22.15

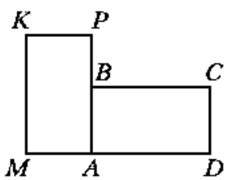
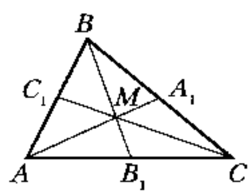


Рис. 22.16



22.151. Точка A_1 (–1; 4) является образом точки A (2; –8) при гомотетии с центром в начале координат. Чему равен коэффициент гомотетии?

22.152. Точки A и B лежат в различных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

22.153. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы лучи XA и XB образовывали с этой прямой равные углы.

22.154. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

22.155. Вершина A квадрата $ABCD$ является центром поворота на угол $90°$. Найдите отрезок BC_1, где точка C_1 – образ точки C при указанном повороте, если $AB = 1$ см.

22.156. Пусть вершина A равностороннего треугольника ABC является центром поворота на угол $120°$. Найдите отрезок BC_1, где точка C_1 – образ точки C при указанном повороте, если $AB = 1$ см.

Дружим с компьютером

В 10 классе вы уже научились создавать изображения стереометрических объектов с помощью графического редактора либо специализированных пакетов для изображения объёмных объектов. Рекомендуем в 11 классе совершенствовать свои умения, создавая иллюстрации к изучаемому материалу. Если вы планируете выбрать профессию, требующую умения чертить и читать чертежи, — инженера, наладчика, квалифицированного рабочего, то вам будет полезно приобрести навыки работы со специализированными пакетами инженерной графики (например, *AutoCad*).

Задания курса стереометрии 11 класса для выполнения с помощью компьютера

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Для выполнения задания достаточно описать алгоритм решения задачи. Для тех, кто любит программирование, предлагаем создавать программы, реализующие эти алгоритмы.

К § 1 «Декартовы координаты точки в пространстве»

1. Напишите программу, которая изображает на экране компьютера оси декартовой системы координат с выбранным единичным отрезком. Напишите программу, которая по заданным координатам точки изображает её в этой системе координат. Для изображения отрезков найдите в изучаемом языке программирования средства изображения отрезка на экране компьютера.

2. Запишите алгоритм для нахождения расстояния между двумя точками в пространстве, заданными своими координатами. Какие структуры данных изучаемого языка программирования вы выберете для задания точки в пространстве? Напишите по этому алгоритму подпрограмму.

3. Напишите программу для нахождения координат середины отрезка.

К § 2 «Векторы в пространстве»

1. Создайте набор подпрограмм для работы с векторами:

1) по координатам начала и конца вектора найти координаты вектора;

2) по координатам вектора найти модуль вектора;

3) по координатам двух векторов определить, коллинеарны ли эти векторы;

4) по координатам двух векторов определить, равны ли эти векторы.

Определите, какие ещё подпрограммы будут полезны для работы с векторами, и добавьте их в этот набор.

2. Напишите программу для решения какой-либо задачи данного параграфа с использованием подпрограмм из этого набора.

К § 3 «Сложение и вычитание векторов»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограммы:

1) сложения двух векторов;

2) вычитания двух векторов.

2. Определите, какие полезные подпрограммы для работы с векторами можно создать по материалу этого параграфа. Напишите их.

3. Напишите программу для сложения n векторов, используя ранее созданные подпрограммы. Обратите особое внимание на способ задания этих векторов.

К § 4 «Умножение вектора на число. Гомотетия»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограмму умножения вектора на число.

2. Напишите программу для нахождения образа данной точки при гомотетии с данным центром и данным коэффициентом. Используйте ранее созданные подпрограммы для работы с векторами.

К § 5 «Скалярное произведение векторов»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограммы:

1) нахождения скалярного произведения двух векторов;

2) нахождения угла между двумя векторами.

К § 6 «Геометрическое место точек пространства. Уравнение плоскости»

1. Предположим, что есть подпрограмма, которая по координатам точки в пространстве определяет, принадлежит ли эта точка некоторому

ГМТ. Как, пользуясь этой подпрограммой, построить изображение этого ГМТ на экране компьютера в декартовой системе координат? Напишите программу для построения такого изображения. Каковы недостатки этого изображения? Какое преобразование, изученное в 10 классе, фактически реализует эта программа?

2. Напишите подпрограмму, которая по координатам точки в пространстве определяет, принадлежит ли она плоскости, заданной во входных параметрах подпрограммы a, b, c, d.

3. С помощью программ, созданных в заданиях 1 и 2, изобразите несколько разных плоскостей на экране компьютера. Сделайте вывод о целесообразности изображения плоскости целиком. Подберите параметры a, b, c, d так, чтобы получить изображение плоскости в виде прямой.

4. Как можно модифицировать программу изображения плоскости, чтобы это изображение было осмысленным?

К § 7 «Цилиндр»

1. Напишите программу, которая по данным (радиусу основания и высоте цилиндра):

1) вычисляет площадь его боковой поверхности и площадь его полной поверхности;

2) строит на экране компьютера изображение развёртки цилиндра и подписывает соответствующие размеры.

2. Представьте окружность как результат вращения точки вокруг центра окружности. Пользуясь этим представлением, напишите подпрограмму для изображения окружности в декартовой системе координат, если эта окружность расположена в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей.

3. Пользуясь подпрограммой, созданной в задании 2, напишите программу для построения «каркасного» изображения цилиндра в декартовой системе координат на экране компьютера. Предусмотрите как можно больше вариантов расположения цилиндра.

К § 8 «Комбинации цилиндра призмы»

1. Каким образом можно задать цилиндр и призму в структурах изучаемого языка программирования, чтобы можно было создать программу для определения, является ли одно из этих тел вписанным в другое? Какие подпрограммы для этого нужны?

2. Реализация программ, описанных в предыдущем задании, сложна в первую очередь потому, что вам неизвестно уравнение окружности в пространстве. Как можно обойти эту проблему?

Указание. Представьте окружность как ГМТ, принадлежащих данной плоскости и находящихся на данном расстоянии от данной точки — центра окружности.

К § 9 «Конус»

1. Напишите программу, которая по данным (радиусу основания и высоте конуса):

1) вычисляет площадь его боковой поверхности и площадь его полной поверхности;

2) строит на экране компьютера изображение развёртки конуса и подписывает соответствующие размеры.

2. Пользуясь подпрограммой, созданной в задании 2 к § 7, напишите программу для построения «каркасного» изображения конуса в декартовой системе координат на экране компьютера. Предусмотрите как можно больше вариантов расположения конуса.

К § 10 «Усечённый конус»

1. Напишите программу, которая для данного усечённого конуса строит его развёртку и вычисляет площадь его полной поверхности. Какие нужны входные параметры для описания усечённого конуса?

К § 11 «Комбинации конуса и пирамиды»

1. Проанализируйте, из каких графических элементов состоит изображение конуса (усечённого конуса), вписанной в него и описанной около него пирамиды (усечённой пирамиды). Сделайте выводы о том, какая информация нужна для построения этих изображений на экране компьютера.

К § 12 «Сфера и шар. Уравнение сферы»

1. Напишите программу, которая по заданному уравнению сферы и заданной точке определяет, как расположена точка по отношению к сфере: вне сферы, принадлежит сфере или внутри сферы.

К § 13 «Взаимное расположение сферы и плоскости»

1. Напишите программу, которая по заданным уравнениям сферы и плоскости строит на экране компьютера изображение сферы и ГМТ пересечения сферы и плоскости.

К § 14 «Многогранники, вписанные в сферу», § 15 «Многогранники, описанные около сферы» и § 16 «Комбинации цилиндра и сферы, конуса и сферы»

1. Проанализируйте задания, которые вы выполняли в предыдущих параграфах, и определите, какие аналогичные задачи вы можете решить для сферы и многогранников, конуса и цилиндра, вписанных в сферу и описанных около неё.

К § 17 «Объём тела. Формула для вычисления объёма призмы»

1. Напишите программу для вычисления объёма правильной n-угольной призмы со стороной основания a и высотой h.
2. Воспользовавшись классификацией призм, напишите программу для вычисления объёма как можно большего количества разных видов призм. Учтите, что в зависимости от вида призмы могут понадобиться разные параметры для её описания. Выбор вида призмы осуществляйте через меню для пользователя программы.

К § 18 «Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды»

1. Проанализируйте задачи, приведённые в этом параграфе. Напишите программу для вычисления объёма пирамиды/усечённой пирамиды с использованием различных исходных данных, описывающих саму пирамиду и её элементы. Выбор имеющихся данных осуществляйте через меню для пользователя программы.

К § 19 «Объёмы тел вращения»

1. Проанализируйте задачи, приведённые в этом параграфе. Напишите программу для вычисления объёмов тел вращения с выбором вида тела (конус, цилиндр, усечённый конус, шар) и имеющихся о нём сведений через меню для пользователя программы.

К § 20 «Площадь сферы»

1. Напишите программу, которая по заданному радиусу шара и толщине атмосферы вычисляет объём шара и объём его атмосферы.
2. Постройте с помощью редактора диаграмм *Word* или *Excel* столбчатую диаграмму. Выберите вид диаграммы «объёмная» и представление ряда данных в виде различных геометрических фигур (призм, конусов и т. п.). Используя полученные знания об объёмах тел, определите, какие из этих фигур дают наиболее адекватное представление о соотношении числовых величин.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации. Примерный объём реферата — 10–15 страниц, доклада или компьютерной презентации — 10–20 минут.

Ниже приводятся темы, рекомендуемые для проектной работы, и списки литературы. При работе над проектами можно также использовать интернет-ресурсы.

1. Конические сечения

Акопян А. В., Заславский А. В. Геометрические свойства кривых второго порядка. — М. : МЦНМО, 2007.

Бронштейн И. Общие свойства конических сечений // Квант. — 1975. — № 5.

Дорфман А. Г. Оптика конических сечений. Серия «Популярные лекции по математике». — Вып. 31. — М. : Физматгиз, 1959.

Маркушевич А. И. Замечательные кривые. — М. : ГИТТЛ, 1952.

2. Объём шара и принцип Кавальери

Болтянский В. О понятиях площади и объёма // Квант. — 1977. — № 5.

Лурье С. Математический эпос Кавальери // Квант. — 1994. — № 2.

Мамикон М. Объём шара // Квант. — 1977. — № 5.

Мамикон М. Центр тяжести полушария // Квант. — 1978. — № 11.

Рабинович В. Вычисление объёма с помощью принципа Кавальери // Квант. — 1972. — № 6.

Терешин Д. Обращение принципа Кавальери // Квант. — 1994. — № 2.

Шевелев Л. Объём тел вращения // Квант. — 1973. — № 8.

3. Площадь поверхности

Дубровский В. Площадь поверхности по Минковскому // Квант. — 1979. — № 4.

Меерзон Г. А., Ященко И. В. Длина, площадь, объём. — М. : МЦНМО, 2011.

Панов А. Малярный парадокс // Квант. — 1986. — № 8.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М. : Наука, 1989.

4. Стереометрия и проективная геометрия

Заславский А. Некоторые факты проективной геометрии // Квант. — 1996. — № 1.

Перспектива // Квант. — 1984. — № 2.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М. : Наука, 1989.

Савин А. Проективная плоскость // Квант. — 1974. — № 3.

Тадеев В. Простые, двойные, гармонические // Квант. — 1982. — № 7.

Театр теней // Квант. — 1989. — № 11.

Шарыгин И. Выход в пространство // Квант. — 1975. — № 5.

5. Теоремы Чевы и Менелая в пространстве

Габович И. Теорема Менелая для тетраэдра // Квант. — 1996. — № 6.

Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 3 : Треугольники и тетраэдры. — М. : МЦНМО, 2009.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М. : Наука, 1989.

Эрдниев Б., Манцаев Н. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. — 1990. — № 3.

Сведения по планиметрии

Соотношения в треугольнике

Неравенство треугольника. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике:

1) углы при основании равны;

2) медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.

Признаки равнобедренного треугольника

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.

Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Признаки параллельности двух прямых

Если накрест лежащие углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Если сумма односторонних углов, образовавшихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.

Если соответственные углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересекаются секущей, то:

1) углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;

2) углы, образующие пару соответственных углов, равны;

3) сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Описанная и вписанная окружности треугольника

Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника. В этом случае также говорят, что треугольник вписан в окружность.

Центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин.

Около любого треугольника можно описать окружность. Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. В этом случае также говорят, что треугольник описан около окружности.

Центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех его сторон.

В любой треугольник можно вписать окружность. Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения его биссектрис.

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Ответы и указания к упражнениям

1.13. 66. **1.14.** $3\sqrt{14}$. **1.22.** 5. **1.23.** 13. **1.24.** $y = -2$ или $y = -10$. **1.25.** A (3; 0; 0) или A (–1; 0; 0). **1.26.** (0; –7; 0). **1.27.** (–10,5; 0; 0). **1.28.** (0; 0; 7). **1.29.** A (–8; 0; 4), B (0; 6; 0). **1.30.** B (17,5; –13; 7). **1.31.** D (–2; –9; 4). **1.34.** $(0;-0{,}5;2)$. **1.35.** (2; 2; 2) или (–2; –2; –2). **1.36.** (–3; 1; 8), (1; 3; 0), (9; –7; 2). **1.37.** C (5; 4; 4), B_1 (3; 6; 3), C_1 (7; 7; 3), D_1 (8; 3; 0). **1.38.** 625 см². **1.39.** $8\frac{1}{3}$ см. **1.40.** 5 см. **2.11.** D (7; –4; 5). **2.12.** $x = 20$, $y = -29$, $z = -18$. **2.14.** 3. **2.15.** –3 или 3. **2.16.** –14 или 2. **2.21.** B (–3; 16; –7). **2.22.** $\overrightarrow{m}$ (4; 4; 4) или $\overrightarrow{m}$ (–4; –4; –4). **2.23.** $\overline{c}$ $(3\sqrt{3};\ -3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3})$ или $\overline{c}$ $(-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3};\ -3\sqrt{3})$. **2.24.** B_1 (5; –3; –4). **2.25.** Да. **2.26.** 486 см². **2.27.** 13 см. **2.28.** 72 см². **3.14.** 1) $\overrightarrow{NK}$; 2) $\overrightarrow{DB}$. **3.15.** 1) $\overrightarrow{FM}$; 2) $\overrightarrow{BE}$. **3.22.** *Указание*. Рассмотрите разность правой и левой частей данного равенства. **3.24.** $2\sqrt{2}$ см. **3.25.** $2\sqrt{3}$ см. **3.26.** A (3,5; –1,5; 8). **3.27.** M (–0,5; –2,5; 4,5). **3.30.** $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1D}$. **3.31.** $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$. **3.32.** $\sqrt{26}$ при $y = -4$. **3.33.** 1 при $x = 3$, $z = -5$. **3.34.** 660 см². **3.35.** 9,6 см. **3.36.** $180\sqrt{3}$ см². **4.10.** –3. **4.11.** (12; –21; –33). **4.13.** $x = -\frac{4}{7}, z = \frac{35}{4}$. **4.14.** $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **4.15.** D (6; 0; 10). **4.16.** $\overline{b}\left(\frac{2}{7};-\frac{6}{7};-\frac{3}{7}\right)$. **4.17.** $\overrightarrow{m}$ (5; –5; 10). **4.18.** 1) Нет; 2) да. **4.19.** $y = -9$, $z = 3$. **4.20.** $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **4.21.** $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **4.22.** $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **4.23.** C_1 (–6; 4; 2). **4.24.** K (6; –7; 0). **4.27.** 12 см². **4.28.** 10 см. **4.29.** 2) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **4.30.** $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DO}$. **4.31.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **4.32.** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. **4.33.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **4.34.** $\overrightarrow{MK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AA_1}$. **4.35.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 2 из § 4. **4.36.** *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и покажите, что $\overrightarrow{MK} \parallel \overrightarrow{MP}$. **4.37.** *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{PE}$ и $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$. **4.38.** *Указание*. Рассмотрите систему координат с началом координат в точке B и осями, содержащими рёбра BA, BC и BB_1 куба. **4.39.** 8 см. **4.40.** 54°. **4.41.** 10 см. **5.7.** –19,5. **5.8.** –12. **5.11.** 4. **5.12.** –3. **5.13.** $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$. **5.14.** 1. **5.15.** –1 или 2. **5.16.** 1) $-\frac{a^2}{2}$; 2) $-\frac{a^2}{4}$;

3) $-\frac{a^2}{4}$; 4) 0. **5.17.** 1) a^2; 2) $-2a^2$; 3) 0; 4) $-\frac{a^2}{2}$. **5.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$; 2) 0. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DB}$. **5.19.** a^2. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. **5.20.** $180° - \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **5.21.** $180° - \arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **5.22.** 143. **5.23.** 70. **5.24.** 0,7. **5.25.** 60°. **5.26.** Остроугольным. **5.28.** D (0; 0; –5). **5.29.** D (0; 4; 0). **5.30.** 60°. **5.31.** 45°. **5.32.** 1) $\frac{3a^2}{4}$; 2) 0. **5.33.** $-\frac{3a^2}{2}$. *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. **5.34.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. *Указание*. I способ. Рассмотрите векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ и выразите их через векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. II способ. Рассмотрите систему координат с началом координат в точке B, осями, содержащими рёбра BA, BC и BB_1 куба, и единичными отрезками, равными ребру куба. Найдите в этой системе координат координаты векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$. **5.35.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **5.38.** 80 см². **5.39.** 1 см. **5.40.** 12 см². **6.2.** 120°. **6.3.** $4\sqrt{2}$ см. **6.6.** 1) $2x - y - 2z - 3 = 0$; 2) $3x + 2y + 3z - 13 = 0$. **6.7.** $2x - y - 3z = 0$. **6.8.** $4x + 3y - 6z - 61 = 0$. **6.9.** $y - 4 = 0$. **6.10.** $z + 3 = 0$. **6.11.** $5x - 5y - 2z + 1 = 0$. **6.12.** –4,5. **6.13.** 1) Да; 2) нет. **6.14.** $x + y - 5z - 50 = 0$. **6.15.** $\arccos\frac{\sqrt{21}}{14}$. **6.16.** 1) Да; 2) нет. **6.17.** 1) $x - 2y + z + 1 = 0$; 2) $x - 2y + z - 9 = 0$. **6.18.** $x + y - z - 6 = 0$. **6.19.** 1) $by + cz + d = 0$; 2) $ax + cz + d = 0$. **6.20.** $2x - 3z + 1 = 0$. *Указание*. Уравнение плоскости, параллельной оси y, имеет вид $ax + cz + d = 0$. Подставив в это уравнение координаты точек A и B, выразите коэффициенты a и c через коэффициент d. **6.21.** $y + 5z - 5 = 0$. **6.22.** $2\sqrt{14}$. *Указание*. Пусть точка B $(x_0; y_0; z_0)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на данную плоскость. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\overline{m}$ (1; 3; 2) и существует число k, отличное от нуля, такое, что $\overrightarrow{AB} = k\overline{m}$. Выразите координаты точки B через коэффициент k и воспользуйтесь тем, что точка B принадлежит данной плоскости. **6.23.** $\frac{\sqrt{30}}{2}$. **6.24.** $x - 5y + 8z - 15 = 0$. **6.25.** *Указание*. Рассмотрите систему координат с началом координат в точке D. **6.26.** *Указание*. Рассмотрите систему координат с началом координат в точке A и осями с единичным отрезком, равным ребру куба, содержащими рёбра AD, AB и AA_1. Составьте уравнение

плоскости AB_1D_1 в этой системе координат. **6.27.** 13 см. **6.28.** 32 см. **6.29.** $27\sqrt{7}$ см^2. **7.8.** $18\pi\sqrt{3}$ см^2. **7.9.** 13 см. **7.10.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **7.11.** 2π см^2. **7.13.** $4S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **7.14.** $\frac{S}{\pi}$. **7.15.** $24\pi\sqrt{2}$ см^2. **7.16.** 128π см^2. **7.17.** $\frac{2\pi a^2\operatorname{tg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **7.18.** $\frac{\pi m^2\sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **7.19.** 1) Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного в результате вращения прямоугольника, не зависит от того, вокруг какой стороны осуществляется вращение; 2) вокруг меньшей стороны. **7.20.** 8 см. **7.21.** $2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **7.22.** 48 см^2. **7.23.** *Указание*. Постройте осевое сечение цилиндра, проходящее через точку A. **7.24.** 16 см. **7.25.** 10 см. **7.26.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}$. **7.27.** $\operatorname{arctg}(\pi\operatorname{tg}\alpha)$. **7.28.** $2\sqrt{7}$ см. **7.29.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **7.30.** *Указание*. Через точку A проведите прямую m, параллельную прямой MM_1. Пусть она пересекает нижнее основание цилиндра в точке A_1 $(AA_1 = MM_1)$, а K — точка пересечения прямых A_1B и MN. Искомая точка — точка пересечения прямых AB и KK_1, где $KK_1 \parallel MM_1$ и $KK_1 = MM_1$. **7.32.** $4S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **7.33.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **7.34.** 256 см^2 или 400 см^2. *Указание*. Необходимо рассмотреть два случая: 1) плоскость прямоугольника параллельна оси цилиндра; 2) плоскость прямоугольника пересекает ось цилиндра. Во втором случае надо доказать, что проекция прямоугольника $ABCD$ на плоскость основания цилиндра также является прямоугольником. **7.35.** $4\sqrt{2}$ см. **7.36.** $h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$. **7.37.** 6 см. **7.38.** $4\sqrt{13}$ см. **8.7.** Да. **8.8.** Нет. **8.10.** $\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. **8.11.** 170π см^2. **8.12.** 162 см^2. **8.13.** $24\sqrt{6}$ см^2. **8.14.** $2a^2\operatorname{ctg}\alpha$. **8.15.** 48 см^2. **8.16.** $10\pi\sqrt{3}$ см^2. **8.17.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **8.18.** 120π см^2. **8.19.** 40 см^2. **8.20.** $2:\sqrt{3}$. **8.21.** $2:1$. **8.22.** $\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\alpha}$. **8.23.** $\frac{2S\sqrt{3}}{9}$. **8.24.** $\frac{S(\sqrt{2}-1)}{2h}$. **8.25.** $\pi m^2\sin 2\beta\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **8.26.** $\frac{1}{2}\pi d^2\sin 2\beta\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$. **8.27.** $\frac{1}{4}\pi S\sin\alpha$. **8.28.** $\frac{1}{6}\pi S\sqrt{3}$. **8.29.** $\frac{1}{4}d^2\sin 2\alpha$. **8.30.** $2R^2$. **8.31.** 3,6 см^2. **8.32.** 8π см. **8.33.** 1000 см^2. **9.7.** 1) $H^2\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{\pi H^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. **9.8.** 1) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; 2) $\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$.

9.11. 25 см, 20 см. **9.12.** 160π см^2. **9.14.** $\frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **9.15.** $2m\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$.

9.16. $\frac{H^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$. **9.17.** $32\pi\sqrt{2}$ см^2. **9.18.** $\frac{1020\pi}{13}$ см^2. **9.19.** $\frac{1}{2}\pi a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha(2\cos\alpha+1)$.

9.20. $\frac{\pi a^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **9.21.** 84π см^2. **9.22.** $\pi(9+\sqrt{2})$ см^2. **9.23.** $200\pi\sqrt{3}$ см^2.

9.24. 240π см^2. **9.25.** 8 см. **9.26.** 60°. **9.27.** 216°. **9.28.** $\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\cos\alpha}$. **9.29.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см.

9.30. $\frac{R^2\,\mathrm{tg}\,\beta\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}{\sin\alpha}$. **9.31.** $\frac{\pi H^2\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta}$. **9.32.** $3\pi\sqrt{6}$ см^2.

9.33. 252π см^2. **9.34.** $\frac{5}{4}\pi a^2\sqrt{3}$. **9.35.** 10 см. **9.36.** 8 см. **9.37.** $12\sqrt{3}$ см.

10.1. 64π см^2. **10.2.** 2 : 1. **10.7.** $24\pi\sqrt{2}$ см^2. **10.8.** 120π см^2. **10.9.** $\frac{9}{16}S$.

10.10. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **10.11.** 9 см^2. **10.12.** 5 : 7. **10.13.** $(R^2-r^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **10.14.** 520π см^2.

10.17. $24\pi\sqrt{3}$ см^2. **10.18.** $\frac{m}{2\cos\alpha}$, $-\frac{m\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$. **10.19.** $\frac{h(\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\alpha)}{2}$, $\frac{h(\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha)}{2}$. **10.20.** $\frac{1}{6}\pi\sqrt{6}(a^2-b^2)$. **10.21.** $\frac{(R^2-r^2)\sin\alpha}{2\cos\beta}$. **10.22.** $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

10.23. $\frac{1}{2}\pi a^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)$. **10.24.** $\frac{4\pi S\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **10.25.** $\frac{9\pi}{4}$ см^2.

10.26. $8\sqrt{10}$ см. **10.27.** $32\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)$ см^2. **11.1.** $16\sqrt{3}$ см^2. **11.2.** $25\sqrt{2}$ см^2.

11.3. $\frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin\alpha}$, $\frac{a}{2\sin\alpha\cos\beta}$. **11.4.** 65π см^2. **11.5.** 120 см^2. **11.6.** $2\sqrt{10}$ см.

11.7. $3\sqrt{6}$ см. **11.8.** $\frac{\pi a^2}{12\cos\alpha}$. **11.9.** $\frac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **11.10.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2-\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$.

11.11. $\frac{\pi a^2\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}{12\cos\alpha}$. **11.12.** $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$. **11.13.** $\frac{\pi b^2}{4\cos^2\alpha\cos\varphi}$.

11.14. $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 2\alpha\cos\beta}$. **11.15.** $\frac{325\pi}{4}$ см^2. **11.17.** $\frac{\pi m^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$. **11.18.** $\frac{2d^2}{\sin 2\beta}$.

11.19. $\frac{1}{4}a^2\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **11.20.** $\frac{\pi a^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$. **11.21.** 8π см^2. **11.22.** 12π см^2.

11.23. $108\sqrt{39}$ см^2. **11.24.** $60\pi\sqrt{2}$ см^2. **11.25.** $96\sqrt{2}$ см^2. **11.26.** 63π см^2. **11.27.** 162 см^2. **11.28.** 45π см. **11.29.** $\sqrt{62}$. **12.17.** (0; 0; 0), (4; 0; 0), (0; –6; 0), (0; 0; 12). **12.18.** C (0; 7; 0). **12.19.** $x^2+y^2+z^2=49$ или $(x+12)^2+y^2+z^2=49$. **12.20.** $x^2+y^2+z^2=9$ или $x^2+y^2+(z+4)^2=9$. **12.22.** (0; 8; –3), $r=\sqrt{73}$. **12.23.** $x^2+(y+4)^2+(z-8)^2=46$ или $x^2+(y-5{,}6)^2+(z-3{,}2)^2=46$. **12.24.** $(x-9)^2+y^2+(z-3)^2=90$ или $(x-3)^2+y^2+(z+9)^2=90$. **12.25.** $x^2+(y-9)^2+z^2=36$. Сфера с центром (0; 9; 0) и радиусом 6. **12.26.** $(x-1{,}5)^2+(y-0{,}5)^2+(z+2{,}5)^2=\frac{27}{4}$. **12.27.** 4,5 см. **12.28.** 10π см. **12.29.** 60°. **13.11.** $4\pi\sqrt{3}$ см. **13.16.** 48π см^2. **13.18.** 24 см. **13.19.** 8 см. **13.20.** 7 см. **13.21.** 144π см^2. **13.22.** 15 см. **13.23.** 10π. **13.24.** 13π. **13.26.** 1 см. **13.27.** 15 см. **13.28.** 32π см^2. **13.29.** $(x-6)^2+(y+6)^2+(z-6)^2=36$ или $(x-22)^2+(y+22)^2+(z-22)^2=484$. **13.30.** $(x+4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=16$. **13.31.** $2x-y-2z+9=0$. **13.34.** 48π см. **13.35.** 13 см. **13.36.** $\frac{1}{2}a\cos\alpha$. **13.37.** $8\sqrt{2}$ см. **13.38.** 6 см. **13.39.** $2\sqrt{10}$ см. **13.40.** 4 см. **13.41.** $\pi\left(R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{a^2}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ или $\pi\left(R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{a^2}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **13.42.** 1 : 2. **13.43.** 25 см. **13.44.** 35 см^2. **14.1.** 7 см. **14.2.** $8R^2$. **14.3.** 7 см. **14.4.** $4a\sqrt{4R^2-2a^2}$. **14.5.** 11 см. **14.6.** 24 см. **14.7.** 17 см. **14.8.** 2,25 см. **14.9.** $2R\sin^2\alpha$. **14.10.** $\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$. **14.11.** $\frac{a(\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha)}{4}$. **14.12.** 4 см. **14.13.** 9 см. **14.14.** $\frac{2R}{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$. **14.15.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **14.17.** Если $b\geqslant h\sqrt{2}$, то центр сферы принадлежит пирамиде; если $b<h\sqrt{2}$, то центр сферы не принадлежит пирамиде. **14.18.** $2R^2\sin^2 2\beta\sin\alpha$. **14.19.** 13 см. **14.20.** $\frac{7}{6}$ см. **14.21.** 40 см или 30 см. **14.22.** $2\sqrt{3}$ см. **14.23.** 2 см. **14.24.** $\frac{a\sqrt{27\operatorname{tg}^2\alpha+48}}{12}$. **14.25.** 13 см. **14.26.** 10 см. **14.27.** 7 см. *Указание*. Рассмотрите прямоугольный параллелепипед с измерениями 4 см, 6 см и 12 см. Половина его диагонали равна искомому радиусу. **14.28.** 15 см. **14.29.** $56\sqrt{3}$ см^2. **14.30.** 300 см^2. **14.31.** $2\sqrt{2}$. **15.2.** $18R^2\sqrt{3}$. **15.3.** $12R^2\sqrt{3}$. **15.4.** $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **15.5.** $2h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **15.6.** 216 см^2. **15.7.** 384 см^2. **15.8.** $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **15.9.** $\frac{1}{2}a\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **15.10.** $\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

15.11. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **15.12.** 1 см. **15.13.** $\frac{1}{2}a\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **15.14.** $\frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **15.15.** $3S$. **15.16.** $\sqrt{2}$: 1. **15.17.** 12π см^2. **15.18.** 2π см. **15.19.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}}$. **15.20.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}}$. **15.22.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **15.23.** $81\sqrt{3}$ см^2. *Указание.* Апофема данной усечённой пирамиды равна сумме радиусов окружностей, вписанных в её основания. **15.24.** $32R^2$. **15.25.** 96 см^2. **15.26.** 150 см^2. **15.27.** Да. $\vec{k}\,(-12;\ 15;\ -9)$ или $\vec{k}\,(12;\ -15;\ 9)$. **16.6.** $4\pi R^2$. **16.7.** 1 : 2. **16.8.** $2\sqrt{2}$ см. **16.9.** В 2 раза. **16.10.** $2\pi R^2\sin 2\alpha$. **16.11.** $4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$. **16.12.** $\frac{b^2}{2h}$. **16.13.** $2\pi R^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **16.14.** $\frac{25}{3}$ см. **16.15.** $2\sqrt{3}$ см. **16.16.** 3 см. **16.17.** $b\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$. **16.18.** 64π см^2. **16.19.** 49π см^2. **16.20.** $\sqrt{Rr}$. **16.21.** $\frac{1}{2}b\sin\alpha$, $b\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $b\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **16.22.** $16\pi\sqrt{5}$ см^2 или $8\pi\sqrt{5}$ см^2. **16.23.** 7 см или 1 см. **16.24.** $-\frac{\pi r^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\cos 2\alpha}$. **16.25.** $\pi R^2(5\sqrt{2}+7)$. **16.26.** $7{,}2\pi$ см^2. **16.27.** $2R\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **16.28.** $\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$. **16.29.** $\frac{288\pi}{13}$ см. **16.30.** 6 см. **16.31.** 2 см. **16.32.** $18\sqrt{2}$. **17.2.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$. **17.5.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **17.7.** $\frac{h^3\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha}{4}$. **17.8.** 6 см. **17.9.** 288 см^3. **17.10.** 36 800 м^3. **17.11.** $h=\frac{ab}{S}$. **17.12.** 456 м^3. **17.13.** $480\sqrt{3}$ см^3. **17.14.** 1152 см^3. **17.17.** $162\sqrt{3}$ см^3. **17.18.** $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **17.19.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **17.20.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ см^2. **17.21.** $\frac{1}{4}d^3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. **17.22.** $\frac{1}{4}c^3\sin 2\beta\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **17.23.** $\sqrt{S_1S_2S_3}$. **17.24.** $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{2}}$. **17.27.** $\frac{1}{4}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **17.28.** $\frac{a^3}{2}$. **17.29.** $128\sqrt{3}$ см^3. **17.30.** $72\sqrt{3}$ см^3. **17.31.** $19\,200\sqrt{3}$ см^3. **17.32.** $\frac{640}{3}$ см^3. **17.33.** $1560\sqrt{3}$ см^3. **17.34.** $36\sqrt{3}$ см^3. **17.35.** $5\sqrt{2}$ см^3.

17.36. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **17.37.** $3\sqrt{15}$ см^3. *Указание.* Пусть AA_1C_1C – грань призмы $ABCA_1B_1C_1$, которая является ромбом. $AC = 3$ см, $A_1C = 4$ см, тогда $AC_1 = 2\sqrt{5}$ см. Высота ромба, опущенная из вершины A_1 на сторону AC, является и высотой призмы. **17.38.** 108 см^3. **17.39.** 16 см, 12 см. **17.40.** 3,5 см. **17.41.** 1) $p = 4$; 2) $p = 0$; 3) $3x - 2y = 0$. **18.6.** $\frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$. **18.7.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см^3. **18.8.** 18 см^3. **18.9.** $\frac{V}{6}$. **18.10.** 1692 см^3. **18.11.** 504 см^3. **18.12.** $\frac{525\sqrt{3}}{4}$ см^3. **18.13.** $\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **18.14.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **18.15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **18.16.** $\frac{1}{3}b^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **18.17.** $\frac{4}{3}b^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **18.18.** 108 см^3. **18.19.** 2880 см^3. **18.20.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos\alpha}$. **18.21.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **18.22.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **18.23.** $2\sqrt{5}$ см. **18.24.** $40\sqrt{3}$ см^3. **18.25.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **18.26.** $27\sqrt{3}$ см^3. **18.27.** $\frac{1}{6}m^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **18.28.** $\frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{24}$. **18.29.** 7,84 т. **18.30.** $\frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{6}$. **18.31.** $336\sqrt{3}$ см^3. **18.32.** 1330 см^3. **18.34.** $\frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$. **18.35.** 2 см. **18.36.** $\frac{d^3\sqrt{3}}{27\sin^2\alpha\cos\alpha}$. **18.37.** $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$. **18.38.** $\frac{H^3\sqrt{3}\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{4}$. **18.39.** $\frac{1}{12}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **18.40.** $\frac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos(45^\circ - \alpha)}$. **18.41.** $\frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\beta}{24}$. **18.42.** $\frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **18.43.** $\frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{16}$. **18.44.** $64\sqrt{3}$ см^2. **18.45.** 936 см^2. **18.46.** $x - y + 2z = 0$. **19.4.** $\pi a^2 b$. **19.5.** $\frac{\pi H^3}{4}$. **19.6.** 750π см^3. **19.11.** 39 т. **19.12.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **19.13.** 64π см^3. **19.14.** 125π см^3. **19.15.** 240π см^3. **19.16.** 744π см^3. **19.17.** $\frac{52\pi}{3}$ см^3. **19.22.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **19.23.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **19.24.** 80 м. **19.25.** 77 кг. **19.26.** $\frac{\pi m^3\operatorname{ctg}^2\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **19.27.** πR^3. **19.28.** 3380π см^3. **19.29.** $\frac{2\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

19.30. $\dfrac{\pi m^3}{3\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **19.31.** $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{tg}\beta}{24\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}$. **19.32.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ см^3.

19.33. $\frac{1}{3}\pi b^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\right)$. **19.34.** $\frac{1}{3}\pi R^3\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **19.35.** 448π см^3.

19.36. 225π см^3. **19.37.** $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\beta\operatorname{tg}\beta$. **19.38.** $2\pi\sqrt{6}$ см^3. **19.39.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3.

19.40. 96π см^3. **19.41.** $\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **19.42.** 6 см. **19.43.** 1,6 т. **19.44.** $\frac{R^3-r^3}{R^3}$.

19.45. $\frac{760\pi\sqrt{3}}{9}$ см^3. **19.46.** 504π см^3. **19.47.** $162\pi\sqrt{3}$ см^3. **19.48.** 576π см^3.

19.49. 125 шаров. **19.50.** 6 см. **19.51.** 36π см^3. **19.52.** $\frac{4\pi}{3}$ см^3. **19.53.** $\frac{32\pi H^3}{81}$.

19.54. $\frac{\pi a^3}{6\sin^3\alpha}$. **19.55.** $\frac{\pi V\sqrt{3}}{9}$. **19.56.** 28π см^3. **19.57.** $\frac{1}{3}\pi b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$.

19.58. 64π см^3. **19.59.** $\frac{1}{24}\pi a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}\beta$. **19.60.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3.

19.61. $\frac{1}{12}\pi a^3\sin\alpha(2-\cos 2\alpha)$. **19.62.** $\frac{2}{3}\pi r^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right)$. **19.63.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$.

19.64. $\frac{\pi a^3}{6\sin^3\alpha}$. **19.65.** 1 : 7. **19.66.** $a(2-\sqrt{2})$. **19.67.** $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

20.6. 9 : 25. **20.8.** 232π см^2. **20.9.** 160π см^2. **20.10.** 55,3 м. **20.12.** 2500π см^2.

20.13. 676π см^2. **20.14.** 136π см^2. **20.15.** 1 : 3. **20.16.** 49π см^2. **20.17.** $\frac{4S}{3}$.

20.18. 1 : 4. **20.19.** S_1+S_2. **20.20.** $S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}$. **20.21.** $\frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha\sin^2 2\beta}$.

20.22. $4\pi H^2\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **20.23.** 153°. **20.24.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **20.25.** Да. **21.1.** 1) $x=-7$, $z=1$; 2) $C\,(0;4;0)$. **21.2.** 2) $\frac{69\pi}{4}$. **21.3.** 9. **21.4.** $y=3$ или $y=-1$. **21.5.** 1) $(-3;2;-1)$; 2) $(-3;-2;-1)$. **21.6.** $D\,(3;1;-5)$. **21.7.** 1) Нет; 2) да. **21.8.** 6 см. **21.9.** $\overline{0}$.

21.10. $\overrightarrow{AC_1}$. **21.11.** $D(-2;1;2)$. **21.13.** $D(0;1,5;1,5)$. **21.14.** $\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$. **21.15.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. **21.16.** $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

21.17. $\frac{5}{21}$. **21.18.** 90°. **21.19.** $x=1$ или $x=3$. **21.20.** $\overline{m}\,(-0,5;\ 1;\ -0,5)$.

21.21. $180°-\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **21.22.** $\arccos\frac{3}{7}$. **21.23.** $2\sqrt{5}$. **21.24.** 20. **21.25.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

21.26. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **21.27.** $4x - 2y + z - 18 = 0$. **21.28.** $x - 4y + 2z - 21 = 0$. **21.29.** $a = -12$. **21.30.** $a = -7{,}5$, $b = 1{,}6$. **21.31.** 1) $3x - 5y + z - 6 = 0$; 2) $3x - 5y + z - 8 = 0$. **21.33.** 5 см. **21.34.** 1) $\frac{S\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{3S}{5}$. **21.35.** 50 см^2. **21.36.** 19 см^2. **21.37.** $\pi c^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$. **21.38.** $\frac{6S(\sqrt{2}-1)}{\pi}$. **21.39.** $\pi h^2 \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **21.42.** $9\pi\sqrt{3}$ см^2. **21.43.** 8 см^2. **21.44.** 512π см^2. **21.45.** 210π см^2. **21.46.** 1470π см^2. **21.47.** $4\pi\sqrt{3}$ см^2. **21.48.** 32π см^2. **21.49.** $a^2 \operatorname{tg}\alpha$. **21.50.** $8\pi\sqrt{2}$ см^2. **21.51.** 9 см^2. **21.52.** 156π см^2. **21.54.** $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 11$. **21.55.** $(2; 4; 6)$, $(-2; -4; -6)$. **21.56.** $4x - 3y + 5z + 17 = 0$ **21.58.** 4 см. **21.59.** 30 см. **21.60.** $\sqrt{3}$ см. **21.61.** $64\sqrt{2}$ см^2. **21.62.** $2\sqrt{3}$ см. **21.63.** $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$. **21.64.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{30}}{5}$. **21.65.** $1 : \sqrt{5}$. **21.66.** $24R^2\sqrt{3}$. **21.67.** 240 см^2. **21.68.** $\frac{64\pi}{9}$ см^2. **21.69.** 8 : 3. **21.70.** $\frac{H}{2\sin^2\alpha}$. **21.71.** 60°. **21.72.** 6 см. **21.73.** 169π см^2. **21.74.** $64\sqrt{2}$ см^3. **21.75.** $a^3 \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta$. **21.76.** $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$. **21.77.** $\frac{3d^3\sqrt{15}}{50}$. **21.78.** 72 см^3. **21.79.** $\frac{1}{2}h^3 \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$. **21.80.** 300 см^2. **21.81.** 32 см^3. **21.82.** $\frac{a^3}{6}$. **21.83.** $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$. **21.84.** $\frac{V}{27}$. **21.85.** $\frac{2}{3}R^3 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta) \operatorname{tg}\gamma$. **21.86.** 18 см^3. **21.87.** 98 см^3. **21.88.** 2) $\frac{1}{3}a^3 \sin^2\beta \operatorname{tg}\alpha$. **21.89.** $\frac{2m^3}{3\sin\alpha \sin^2\beta \cos\beta}$. **21.90.** $\frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{6}$. **21.91.** 1 : 4. **21.92.** $2\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}$. **21.93.** 9π см^3. **21.94.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$. **21.95.** $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha$. **21.96.** 7 см. **21.97.** $32\pi\sqrt{3}$ см^3. **21.98.** $\frac{32\pi}{3}$ см^3. **21.99.** $\frac{2\pi S}{\sin 2\alpha}$. **22.1.** 84 см. **22.2.** 60 см^2. **22.3.** $\sqrt{26}$ см. **22.4.** 10 см. **22.5.** 12 см. **22.6.** $(\sqrt{2}+1)$ см^2. **22.7.** $4\sqrt{13}$ см. **22.8.** $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$. **22.9.** 48 см. **22.10.** 480 см^2. **22.13.** 17 см. **22.14.** 8 см. **22.15.** 20 см. **22.16.** 192 см. **22.17.** 8 см. **22.18.** 2 см.

22.19. 24 см. **22.20.** 28 см. **22.21.** 30 см. **22.22.** 36 см^2. **22.23.** 36 см^2. **22.24.** 18 см^2. **22.25.** 98 см^2. **22.26.** 6 см^2. **22.27.** 12 см^2. **22.28.** $\frac{65}{18}$ см. **22.29.** 15 см. **22.30.** 8 см. **22.31.** 300 см^2. **22.32.** 3 : 5. **22.33.** 7 : 3. **22.34.** 6 см. **22.35.** 4,5 см. **22.36.** 33 см. **22.37.** 14 см. **22.38.** 128 см. **22.39.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **22.40.** $\frac{320}{27}$ см^2. **22.41.** 15 см, 24 см. **22.42.** 6 см. **22.43.** 60°. **22.44.** $2\sqrt{13}$ см. **22.45.** 10 см. **22.46.** $\frac{441\pi}{20}$ см^2. **22.47.** 2 см. **22.48.** 4 см. **22.49.** 6 см. **22.50.** 16 см. **22.51.** 4 см. **22.52.** 5,5 см. **22.53.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **22.54.** 24 см^2. **22.55.** 12 см^2. **22.56.** $120\sqrt{3}$ см^2. **22.57.** 12 см. **22.58.** 64 см. **22.59.** $60\sqrt{2}$ см^2. **22.60.** 22 см. **22.61.** 12 см^2. **22.62.** 60°. **22.63.** 30°, 60°. **22.64.** 96 см^2. **22.65.** $\frac{2c}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

22.66. 52 см. **22.67.** $12\sqrt{5}$ см. **22.68.** 15 см. **22.69.** 230 см^2. **22.70.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **22.71.** 96 см^2. **22.72.** $4R^2\sqrt{2}$. **22.73.** 135 см^2. **22.74.** 288 см^2. **22.75.** 972 см^2. **22.76.** 1664 см^2. **22.77.** 48 см. **22.78.** 624 см^2. **22.79.** 196 см. **22.80.** 162 см. **22.81.** 60°, 120°, 60°, 120°. **22.82.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **22.83.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.84.** 10 см. **22.85.** $\frac{85}{8}$ см. **22.86.** 306 см^2. **22.87.** 100°. **22.88.** 58°. **22.89.** 60°, 110°, 120°, 70°. **22.90.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **22.91.** 1 : 2. **22.92.** $\sqrt{3}$: 2. **22.93.** $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$. **22.94.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **22.95.** 15°. **22.96.** 6 см. **22.97.** 16 см. **22.98.** 20 см. **22.99.** 12,5 см, 4,5 см. **22.100.** 18 см. **22.101.** 8 см, 12 см. **22.102.** 29π см. **22.107.** $\sqrt{5}$. **22.108.** A (3; –2). **22.109.** (0; –1,5). **22.110.** (2; 0). **22.112.** $(x-1)^2+(y-7)^2=25$. **22.113.** $y = 3x + 7$. **22.114.** $y = -2$. **22.115.** $y = 3x + 3$. **22.116.** $y = x\sqrt{3} + 2$. **22.117.** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$. **22.118.** $y = -0{,}5x - 4$. **22.121.** $y = x - 3$. **22.124.** $\overline{m}$ (7; 1). **22.125.** $\sqrt{65}$. **22.126.** 1. **22.127.** 18. **22.128.** 6. **22.129.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **22.130.** 135°. **22.131.** $\overline{AM} = \frac{3}{5}\overline{a} + \overline{b}$. **22.132.** $\overline{EF} = \frac{4}{7}\overline{b} - \frac{1}{4}\overline{a}$. **22.133.** $\overline{KM} = -\frac{2}{3}\overline{a} - \frac{2}{5}\overline{b}$. **22.139.** (6; –9). **22.140.** (3; 4). **22.152.** *Указание.* Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка X пересечения прямых a и A_1B является искомой. Если точки A_1 и B совпадают, то в качестве искомой точки X можно выбрать любую точку прямой a. Если прямые

a и A_1B параллельны, то задача решений не имеет. **22.153.** *Указание*. Пусть A_1 – образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и BA_1 является искомой. Действительно, $\angle AXK = \angle KXA_1$, поскольку XK – биссектриса угла AXA_1, а $\angle KXA_1 = \angle BXD$ как вертикальные. **22.154.** *Указание*. Пусть точка A_1 – образ точки A при симметрии относительно прямой a. Искомая точка X – это точка пересечения прямых A_1B и a. **22.155.** 1 см или $\sqrt{5}$ см. *Указание*. Рассмотрите два случая: поворот по часовой стрелке и против часовой стрелки. **22.156.** 2 см или 1 см.

Алфавитно-предметный указатель